Chapter.

2024학년도 대비 이경호 수학교육론 용어자료집

◎ 수교이론

(1), (2), (3), … : 신론1, 신론2, 신론3 (2022 개정)
①, ②, ③, … : 수학 학습-지도 원리와 방법

Ⅰ. 수학교육의 이해 (신론1, 2022 개정증보판)

(1) 수학교육의 목적

정신도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성

(2) 수학교육 근대화 운동 이전의 수학교육에 대한 비판

1. 엄밀한 논리적 전개로 수학을 통해 두뇌를 도야해야 한다는 입장하에 소수의 특권층을 대상으로 유클리드 「원론」의 교육이 주를 이룸
2. 실용성을 중심으로 한 수학교육이라는 사회적 필요성에 부응하지 못함
3. 수학은 사회의 현실과 교육의 본질로부터 유리되어 오직 시험 합격을 위한 도구가 됨

(3) 수학교육 근대화 운동의 의의

1. 수학교육의 중요성을 크게 부각시킴
2. 학교수학의 내용을 충실하게 하기 위한 체계적인 노력을 시작함
3. 수학의 실용적 측면을 부각시킴
4. 학생들의 심리적 측면을 고려함

(4) 수학교육 근대화 운동의 한계

1. 논리적 원칙을 깊이 고려하지 않았고, 극단적으로는 논리를 불신하는 경향마저 나타남
2. 현실적으로는 물리량과 공간의 구조를 정식화하고 교재를 마련하는 이론적, 실천적 연구가 전개되지 못함

(5) 수학교육 현대화 운동의 요인

1. 제2차 세계대전 이후 급격한 성장을 이룬 수학 자체의 발달
2. 중등학교에서 지도되는 종래의 학교수학의 내용이 시대에 뒤떨어져 있었음
3. 현대수학의 강력한 응용성에 대처할 필요성이 대두됨
4. 전문 기술 인력이 절대적으로 필요

(6) 수학교육 현대화 운동의 비판(핵심적인 내용)

1. 학생들이 정신적으로 충분히 발달하지 않았음에도 불구하고, 조급한 형식화와 추상화를 시도하고 있다.
2. 장래 수학자가 되기 위한 소수의 학생을 대상으로 하고 있다.
3. 논리적 엄밀성과 연역적 추론이 지나치게 강조되고 있다.
4. 다른 교과와의 관련성을 무시하고 있다.

Ⅱ. 수학교육철학

① 산파법에 따른 지도 방법(소크라테스)

소크라테스의 산파법에 따르는 수학 학습-지도 방법은 대화법이어야 하며, 학생들에게 질문을 던져 학생들 자신의 의견을 개진하도록 한 다음 그것을 논박하여 무지와 곤혹감을 야기시킴으로써 알고자 하는 마음을 유발하여 대화를 통하여 원리를 발견시키는 방법이어야 할 것이다.

② 산파법에 대한 비판

1. 교사의 '지적인 권위'는 엄존하며 수업의 주도권도 교사 쪽에 있다.
2. 학생 자신이 능동적으로 진리탐구에 참여하고 있다고 보기는 어렵다.
3. 교사가 학생이 발견해야 할 핵심적인 내용을 거의 제시하면서 확인만 시키고 있다.

(3) 반례의 유형(라카토스)

1. 전면적 반례: 원래의 추측을 반박하는 반례
2. 국소적 반례: 부분 추측을 반박하는 반례

(4) 반례 대응 방식(라카토스)

1. 괴물배제법(monster-barring method)
   - 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례가 잘못되었다고 보고 반례를 배제하여 원래의 추측을 존속시키는 방법
2. 예외배제법(exception-barring method)
   - 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건 절을 첨가하여 안전한 영역으로 철수하는 방법
3. 보조정리합체법(lemma-incorporation method)
   - 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 그것을 원래 추측에 합체시키고 증명을 고치는 방법

(5) 반례 대응 방식에 따른 효과(라카토스)

1. 괴물배제법
   - 추측에 포함된 개념들을 다시 정의하게 됨
2. 예외배제법
   - 원래의 추측이 성립하는 영역을 축소하여 추측 개선
   - 과대 또는 과소의 일반화를 초래할 여지가 있음
3. 보조정리합체법
   - 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어짐

(6) 수학적 지식의 성장 과정 4단계(라카토스)

1. 1단계: 수학적 추측을 제기하는 단계
2. 2단계: 추측을 부분 추측으로 분해하는 단계
3. 3단계: 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계
4. 4단계: 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

(7) 증명-생성 개념(라카토스)(2023학년도 기입형 1번)

어떤 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 감추어진 보조정리를 드러내어 원래의 추측에 합체하는 과정 속에서 나오는 개념

(8) 준경험주의 수업을 진행할 때 교사의 역할

1. 교사는 학생이 증명을 할 때 추측과 증명의 각 단계에 대한 적절한 반례를 준비해 두었다가 필요할 때에 제시할 수 있어야 한다.
2. 교사가 증명을 제시하는 경우에는 학생 수준에서 반박이 불가능한 증명을 단번에 제시하여서는 안 되며 그렇다고 반박을 하기 위하여 터무니없는 증명을 제시하여서도 안 된다.

(9) 구성주의자의 주장(킬패트릭)

1. 지식의 자주적 구성의 원리
   - 지식은 인식 주체에 의해 능동적으로 구성되는 것이며, 환경으로부터 수동적으로 받아들여지는 것이 아니다.
2. 지식의 생장 지향성의 원리
   - 알게 된다는 것은 자신의 경험 세계를 조직하는 조절 과정이다. 즉, 그것은 인식 주체의 관념 밖에 독립적으로 이미 존재하는 세계를 발견하는 것이 아니다.

(10) 급진적 구성주의의 원리(글래저스펠트)

1. 지식의 자주적 구성의 원리
   - 지식은 감각을 통하거나 의사소통에 의해 수동적으로 받아들여지는 것이 아니다. 지식은 인식하는 주체에 의해서 능동적으로 구성된다.
2. 지식의 생장 지향성의 원리
   - 인식의 기능은 적응적이며, 생물학적인 용어로 적합성 또는 생장성을 지향하는 경향을 지닌다.
3. 지식의 비객관성의 원리
   - 인식은 주체가 경험 세계를 조직하는 데 도움을 주는 것이지, 객관적인 존재론적 실재를 발견하는 것을 돕는 것이 아니다.

(11) 급진적 구성주의와 사회적 구성주의의 차이점

급진적 구성주의	사회적 구성주의
• 지식의 비객관성 원리 • 독립 주관적인 의미에서의 객관성 • 언어의 비공유성 강조	• 지식의 사회적 구성 • 공통 주관적인 의미에서의 객관성(합의성) • 언어의 사회적 공유성(사회성)

(12) 사회적 구성주의에서 말하는 구성의 의미

1. 과정 1: 개인의 주관적인 수학적 지식이 사회의 객관적인 수학적 지식이 되는 과정
   - 개인의 주관적 지식이 공표되어 사회 속에서 공적인 비평과 재형성 과정을 거쳐 객관적인 지식으로 되는 것

2. 과정 2: 사회의 객관적인 수학적 지식이 개인의 주관적인 수학적 지식이 되는 과정
   - 언어와 수학의 학습을 통하여 객관적인 수학적 지식에 대한 내적인 주관적 표상을 구성하는 것

(13) 구성주의 수학 교수·학습 원리(박영배, 1996)

1. 학생 중심적 개별화의 원리
   - 수학 학습 활동의 주체가 학생 개개인이라는 것, 학생 개개인의 지적 자율성에 바탕을 두어야 한다는 원리
2. 발문 중심적 상호작용의 원리
   - 학생이 학습의 주체가 되어 스스로 지식을 구성해 갈 수 있도록 교사가 발문을 중심으로 하여 학생을 안내하거나 조력해야 한다는 원리
3. 의미 지향적 활동의 원리
   - 학생들이 활동 속에 구성한 의미에 충실한 지식의 구성이 이루어져야 한다는 원리
4. 반영적 추상화의 원리
   - 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 반성적 활동을 중시해야 한다는 원리

※ 수학교육의 국제적 동향 정리

~1900년	• 소크라테스의 산파법 • 유클리드 「원론」식 교사 주도의 교육 (연역중심의 수업 방식)
	• 플라톤주의 (절대주의 수리철학)
1900년~1950년	• 수학교육의 근대화 운동 (페리, 클라인, 무어) - 자체적인 학문으로서의 수학교육학의 발전 • 진보주의 교육 (경험중심 교육과정) - 실용성, 유용성을 추구하는 수학교육
	• 수학기초론 학파 (논리주의, 직관주의, 형식주의) → 괴델의 ‘수학의 불완전성 정리’ → 상대주의 수리철학의 발전
1950년~1970년	• 수학교육 현대화 운동 (브루너, 학문중심 교육과정)
1970년대	• 수학교육 현대화 운동의 반성 (기본으로 돌아가기 운동)
	• 준경험주의의 발전 (라카토스)
1980년대	• 문제해결 중심의 수학교육 - NCTM: ‘1980년대의 학교수학을 위한 제안’ • 인간중심 교육과정의 발전 - 전인적 성장 및 정의적 영역의 강조
	• 구성주의의 발전 (조작적, 급진적, 사회적 구성주의)
1990년대 이후	• NCTM: 「학교수학의 교육과정과 평가규준」(1989) • NCTM: 「학교수학의 원리와 규준」(2000)

Ⅲ. 수학 학습 심리학

(1) 인지 발달 단계 이론(피아제)

1. 쉠(schème)
   - 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지 구조
2. 동화(Assimilation)
   - 기존의 어떤 쉠을 고수하면서 가능한 한 넓은 범위의 상황을 그에 종속시키려고 시도하는 보수적 기능
3. 조절(Accommodation)
   - 당면한 문제를 해결하기 위하여 자신의 쉠을 조절, 분화하는 적응 기능
4. 인지 발달
   - 환경에 적응하는 과정에서 끊임없이 일어나는 인지적 균형의 파괴와 동화 및 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 쉠의 끊임없는 재구성 과정

(2) 추상화의 종류(피아제)

1. 경험적 추상화
   - 아동의 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식을 이끌어내는 것
2. 반영적 추상화
   - 아동의 활동에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 것
3. 의사 경험적 추상화
   - 아동의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 것

(3) 반영적 추상화의 요소(피아제)

1. 반사(내면화와 주제화)
   - 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 단계로 옮긴다고 하는 의미
   - 내면화: 행동과 관련된 어떤 내적 구성이 이루어져서 이를 통해 행동을 의식하고 그 행동을 다른 행동과 결합할 수 있게 하는 것
   - 주제화: 하위 단계에서 사고의 도구였던 것이 사고의 대상이 되는 것
2. 반성
   - 반사된 것을 동화와 조절의 균형화 과정을 통해 인지적 불균형을 해결하는 과정
   - 반성에 의하여 새로운 형식이 구성적으로 창조됨

(4) 피아제의 인지심리학 이론이 수학교육에 주는 시사점

1. 활동적 학습
   - 모든 수학적 지식 및 사고의 본질은 조작이고 조작은 행동의 내면화의 산물이므로, 학습은 조작이 바탕이 되는 여러 가지 활동 중심으로 구성되어야 한다.
2. 구체적 조작의 강조
   - 학습자에게 구체물을 다루는 경험을 충분히 제공할 필요가 있다.
3. 갈등 상황 제공
   - 학습자가 인지적 불균형을 느낄 수 있는 갈등 상황을 제공할 필요가 있다.
4. 반성적 사고의 촉진
   - 학습자의 반성적 사고를 촉진하기 위한 교사의 의도적 노력이 필요하다는 것이다.

(5) 지식의 구조(브루너)

'각 학문의 기저를 이루고 있는 핵심적인 개념과 원리', 즉 단순한 사실들이나 잡다한 현상에 대한 정보가 아니라 이러한 사실이나 현상을 서로 관련짓고 체계화하는 주요 개념이나 원리

(6) 브루너의 생각

1. 개인에 의한 자주적인 형성보다는 교육적 전달을 강조
2. 전달 수단으로서 언어의 역할을 강조

(7) 발견학습(브루너)

1. 학문의 최첨단에 서 있는 수학자들이 하는 것과 동일한 종류의 탐구와 이를 통한 발견이 되는 것
2. 지식의 구조에 대한 발견을 통하여 궁극적으로 수학적인 안목의 형성을 기대한 것

(8) EIS 이론(브루너)

1. 활동적(enactive) 표현
   - 적절한 운동적 반응을 통하여 표현하는 것
2. 영상적(iconic) 표현
   - 도식을 이용하여 표현하는 것
3. 상징적(symbolic) 표현
   - 언어 능력의 발달과 더불어 나타나는 것

(9) 근접 발달 영역(ZPD)(비고츠키)

1. 실제적 발달 수준과 잠재적 발달 수준 사이
   - 실제적 발달 수준: 학생이 다른 사람의 도움 없이 독립적으로 문제를 해결하는 수준
   - 잠재적 발달 수준: 좀 더 지식이 풍부한 교사, 성인 또는 유능한 또래의 도움을 얻어 문제를 해결하는 수준
2. 근접 발달 영역을 통한 학습의 발달은 타인의 도움을 받는 수행으로부터 타인의 도움 없이 자기 조절에 의한 수행으로 나아가는 데 점진적으로 이루어진다.

(10) 비계(Scaffolding) 설정(비고츠키)

1. 비계를 설정함으로써 근접 발달 영역을 좁혀갈 수 있다.
2. 비계 설정: 학습자가 주어진 과제를 잘 수행할 수 있도록 유능한 또래나 교사의 도움을 제공하는 지원을 일컫는 것
3. 힌트를 주거나 암시를 주는 것은 비계를 설정하는 행위의 일종이다.

(11) 근접 발달 영역의 4단계(이종희, 김선희, 2005)

1. 1단계: 유능한 타인의 도움을 받아 과제를 수행하는 단계
   - 학생은 독립적으로 과제를 수행할 수 없기 때문에 유능한 타인인 교사나 동료 등의 도움을 필요로 하는 순종이나 모방의 단계
2. 2단계: 학생 스스로 과제를 수행하는 단계
   - 개인 내 수준에서 다른 중재자의 도움을 받지 않거나 적은 도움으로 과제를 수행할 수 있게 된다.

3. 3단계: 과제 수행이 완전히 발달되어 내면화, 자동화가 이루어지는 단계
   - 근접 발달 영역을 벗어나서 과제를 수행하는데 더 이상 타인의 지속적인 도움이 필요 없이 거의 무의식적으로 과제를 완전하게 수행해 낼 수 있게 된다.
4. 4단계: 새로운 능력의 발달을 위해 반복해서 근접 발달 영역이 순환되는 탈자동화의 단계
   - 과제 해결을 수행하다가 어려움에 봉착하게 되면 더 능력 있는 다른 사람의 도움을 필요로 하게 된다.

(12) 스키마 학습의 단점(스켐프)

1. 독립된 과제의 학습에서는 스키마식 학습이 더 오랜 시간이 걸린다는 점
2. 스키마에 맞지 않는 것은 학습하기 어렵게 함으로써 영향력이 너무 크다는 점

(13) 직관적 지능과 반영적 지능(스켐프)

1. 직관적 지능: ‘중재 사고 활동’을 거치지 않고 수용기를 통하여 이루어지는 지능
2. 반영적 단계에서는 중재 사고 활동이 자기 반성적 인식의 대상이 된다.

(14) 도구적 이해와 관계적 이해(스켐프)

1. 도구적 이해
   - 이유는 모르는 채 암기한 규칙을 문제해결에 적용하는 것
2. 관계적 이해
   - 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 알고 있으면서 일반적인 수학적 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 상태

(15) 관계적 이해를 했을 때의 장점(스켐프)

1. 관계적으로 이해된 수학은 새로운 과제에 더 잘 적응한다.
2. 관계적으로 이해된 수학은 기억하기에 더 쉽다.
   - 기억의 지속력이 더 강하다.
3. 관계적으로 이해된 지식은 그 자체가 효과적인 목적이 될 수 있다.
   - 동기 부여가 더욱 쉬워진다.
4. 관계적 스키마는 질적으로 유기적이다.
   - 자기 앞에 놓인 새로운 자료를 관계적으로 이해하려고 노력할 뿐만 아니라 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하게 된다.

(16) 수학 학습(딘즈)

아동의 내발적 동기에 근거한 학습, 수학적 상황에서의 ‘놀이’로써 조직된 수학 학습, 수학적 구조를 내포한 학습 상황에서의 수학적 구조의 구성 및 그 응용 학습을 통해서 통합적 인격 형성에 기여하는 학습

(17) 개폐연속체(딘즈)

개념 형성의 단계를 거쳐 일단 형성된 수학적 개념은 닫힌 상태(폐)로 되지만, 분석과 적용 과정에서 열린 상태(개)로 변하여 보다 객관적이고 보다 높은 수준의 재구성이 이루어진다는 것

(18) 놀이를 통하여 제시하고 있는 수학 개념의 학습 과정(딘즈)

1. 제1단계: 자유놀이
   - 구조화되어 있지 않은 조작이나 실험 활동 등 많은 구체적인 자료를 자유롭게 대하는 시기
2. 제2단계: 게임
   - 자유롭게 놀이를 하는 가운데 점차로 어떤 규칙성이 있다는 느낌을 갖게 되는 시기
3. 제3단계: 공통성 탐구
   - 여러 구체물 속에 공통적으로 들어 있는 특정 개념의 수학적인 구조를 파악하기 시작하며, 게임 단계에서 감지되는 규칙성이 보다 명확해지는 단계
4. 제4단계: 표현
   - 추상화 과정을 통하여 파악한 개념의 공통성을 적절한 방법으로 표현하는 시기
5. 제5단계: 기호화
   - 자신만의 적절한 수단으로 표현한 개념을 수학적인 기호를 이용하여 표현하게 된다.
6. 제6단계: 형식화
   - 추상한 개념의 수학적인 구조를 파악하고, 이 개념이 갖고 있는 여러 성질을 체계화하게 된다.

(19) 수학 학습 원리(딘즈)

1. 역동적 원리(Dynamic Principle): 세 단계를 순차적으로 적절한 시기에 필수적인 경험으로서 제공해야 한다.
  - 수학적 개념 형성을 위하여, 목표가 불분명하며 그 자체로 즐기는 예비놀이 단계
  - 좀 더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인식은 없는 구조화된 놀이 단계
  - 형성된 개념을 고정시키고 적용하기 위한 실습 놀이 단계
2. 구성의 원리(Constructivity Principle)
  - 아동에게 제시하는 수학적 상황은 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 한다는 것
3. 지각적 다양성의 원리(Perceptual Variability Principle)
  - 동일한 개념적 주제에 대한 다양한 수단을 사용하여 가능한 한 많은 변화를 주자는 것
  - 다르게 보이지만 근본적으로 동일한 개념 구조를 가지는 과제를 제공하여 지각적 표현을 변화시키고자 하는 원리
4. 수학적 다양성의 원리(Mathematical Variability Principle)
  - 개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제공하려면, 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다는 것

(20) 유의미 수용학습 관련 용어(오스벨)

1. 실사성
  - 학습 과제의 구조와 내용을 어떻게 표현하더라도 의미와 본성이 변화되지 않는 불변적이고 절대적이어야 함을 뜻한다.
2. 구속성
  - 학습자가 자신의 의미를 통해 어느 정도 깨달을 수 있는 추상적 용어로 인지 구조에 연결될 수 있는 가능성과 잠재력을 소유해야 함을 뜻한다.(신론1)
  - 개념과 의미가 임의로 맺어진 관계이지만 관습으로 굳어져 임의로 변경할 수 없다는 특성을 말한다.(신론3)
3. 관련 정착 아이디어(relevant anchoring idea)
  - 학습자가 학습을 통해 새로운 의미를 인식할 때 필요한 배경 지식(신론3)
4. 잠재적 거리(potential distance)
  - 관련 정착 아이디어와 새로운 지식 사이의 거리
  - 잠재적 거리가 짧으면 학생들이 새로운 지식을 이해하고 습득하는데 도움이 되며, 잠재적 거리가 길면 학생들의 탐구 능력을 발달시키는 데 유용하다.

(21) 유의미 수용학습의 세 가지 조건(오스벨)

다음의 세 가지 조건들 중 어느 하나라도 부족하다면 상대적으로 기계적인 학습이 일어날 가능성이 높아진다.

1. 첫째, 학습 과제는 학습자의 인지 구조에 실사적이고 구속적으로 관련지어질 수 있다.
2. 둘째, 학습자는 유의미한 학습 과제를 받아들일 ‘관련 정착 아이디어’를 소유하고 있어야 한다.
3. 셋째, 학습자는 위의 첫 번째 지식들을 실사적이고 구속적인 방식으로 자신의 인지 구조와 연결하려는 학습 자세를 가져야 한다.

(22) 포섭(subsumption)(오스벨)

포괄성과 일반성이 높은 인지 구조 내의 지식이 포괄성과 일반성이 낮은 새로운 지식을 통합하는 과정

(23) 선행조직자(advance organizers)(오스벨)

1. 선행조직자의 활용
  - 선행조직자는 학습자가 이미 알고 있는 것과 알 필요가 있는 것 사이의 갭을 연결함으로써 통합적 조정의 원리와 점진적 분화의 원리를 수행하도록 돕는 교수학적 전략으로 활용될 수 있다.
2. 선행조직자의 제시
  - 선행조직자는 새로운 학습 과제보다 높은 추상성, 일반성, 포괄성의 수준에서 제시되어야 한다.
3. 선행조직자의 역할
  - 선행조직자는 구체적인 학습 과제 내용과 잘 연계되도록 도우면서 동시에 잠재적으로 내재한 정착 아이디어의 일반적인 내용과도 관련 가능하도록 돕는 역할을 한다.

(24) 점진적 분화의 원리(오스벨)

특정 수학 내용의 가장 일반적이고 포괄적인 아이디어들을 우선 제시하고, 점차 특수화되고 세분화된 방향으로 학습 지도를 조직해야 한다는 원리

(25) 통합적 조정의 원리(오스벨)

1. 새로운 학습 내용과 이미 학습된 내용의 유사성과 차이점을 분명하게 하여 새로운 학습 내용이 인지구조 내에서 의식적으로 조정되고 통합되도록 해야 한다는 원리
2. 낯선 새로운 아이디어의 학습이 가능하려면 새로운 아이디어는 반드시 기존의 낯익은 아이디어와 충분하게 식별 가능해야 한다.

(26) 관계적 결정 원리(형태심리학)

1. 관계적 결정 원리: '전체'는 요소의 단순한 모자이크적인 집합이 아니며 그 자체를 구조화하여 게슈탈트를 형성하고 내적 관련성을 보유하며 '부분'은 그 전체에 의해서 규정되어 있다는 이론
2. 요소(부분)는 전체 속으로 편입된 이상 단순한 요소는 아니며 짜임새 있는 게슈탈트를 이루고 있는 전체 속의 부분인 것이다.
3. 같은 요소일지라도 전체 속의 어떠한 부분으로 위치를 차지하는가, 어떠한 역할과 기능을 하고 있는가에 따라 그 성질이 달라진다.

㉗ 생산적 사고 과정(베르트하이머)

부분의 전체와의 '내적인 구조적 관련성'이 파악되고, 부분의 재조직화로 구조의 개선적 변화가 일어나 구조적 혼란이 해소되고 간격이 메워짐으로써, 전체가 의미 있는 간단 명료한 형태(good Gestalt)로 바뀌는 순간에 일어나는 통찰에 의한 과정

(28) 효과의 법칙(손다이크)

어떤 자극과 반응 사이의 결합이 형성되고 만족스러운 결과가 수반되면 자극-반응의 결합의 강도는 증대되고, 불만족스러운 결과가 수반되면 자극-반응의 결합이 약화된다는 것

㉙ '곤란'에 대한 주장(손다이크)

1. 곤란, 곧 일시적 실패나 기존 본드의 부적절함이 사고와 학습에 본질적이고 필요한 자극이 된다고 보는 것은 잘못이다.
2. 곤란 그 자체로는 아무런 도움도 되지 않으며, 가끔 그에 수반되는 괴로운 실패의 경험은 사고와 학습을 방해한다고 보았다.

Ⅳ. 수학 교수·학습 이론

(1) 교수학적 현상학(프로이덴탈)

본질과 현상의 관계에서 교수학적 요소를 강조하는 것, 즉 본질과 현상의 관계가 교수·학습 과정에서 어떻게 획득되는가에 주목하는 것

(2) 수학화 교수·학습(프로이덴탈)

현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정으로 수학을 설명하면서, 현상을 본질로 조직하는 이러한 과정을 '수학화'로 명명하였다.

(3) 수평적 수학화와 수직적 수학화(트레퍼스)

1. 수평적 수학화
   - 현실 내의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것
2. 수직적 수학화
   - 세련된 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 것

(4) 반교수학적 전도(프로이덴탈)

수학의 연역적인 체계만을 중시하고 그것을 초등화하여 지도하는 것

(5) 안내된 재발명(프로이덴탈)

1. 학습자는 인류의 학습 과정을 수정된 방식으로 재현
2. 아동의 정신적 발달은 역사를 그대로 재현하는 것이 아니라 아동의 현실을 출발점으로 해서 이미 발명된 수학을 아동 스스로 개선된 방법에 의해서 재창조해 나간다는 것

(6) 역사 발생적 원리

1. 역사적 방법
   - 여러 가지 내용 사이의 지도 순서를 인류에 의해 처음 발견되었던 순서대로 정해야 한다는 것
2. 발생적 원리
   - 수학적 개념을 '발생되는 것'으로 보고 그 발생을 수업 과정에 재실행하는 것

(7) 형식 불역의 원리

어떤 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때에는 기존의 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 해야 한다는 것

(8) 사고 실험(프로이덴탈)

1. 사고 실험: 교사의 입장에서 학생들의 재발명을 돕기 위해서, 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 자신의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 것
   - 수업 장면: 교사나 교과서 저자가 한 학생 또는 한 그룹의 가상적인 학생들과 그들의 반응을 생각하면서 그에 따라 가르치거나 저술하는 태도
   - 수업 내용: 어떤 수학적 개념을 발명했거나 수학적 방법을 개선한 개인 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해서 추측하는 것
2. 사고 실험은 교실 수업에서 학생들의 재발명을 돕는 역할을 한다.

(9) 수학적 사고 수준(프로이덴탈)

1. 바닥 수준에서의 활동을 실제 수학을 하는 것은 아니지만 탐구 수준에서의 수학적 활동을 준비하는 예비 수학적 활동으로 파악해야 한다
2. 바닥 수준의 활동이 탐구 수준에서 반성됨으로써 비로소 학생의 학습 과정에서 수학이 시작된다.

⑩ 심상(Mental objects)의 구성(프로이덴탈)

1. 심상의 구성: 아동들은 일반적으로 현상의 조직수단인 본질을 직관적으로 인식하여 심상을 구성하고 정신적 활동으로 조직한다.
2. 심상의 구성이 개념획득에 선행되어야 한다는 입장은 학습의 준비성을 중시하는 것으로 이해를 위한 전략으로 단지 개념의 활동적·영상적·상징적 표현으로의 번역 제시를 주장한 브루너의 이론과 반대되는 것이다.
3. 개념획득 후 적용이란 교수전략은 현상의 정리수단으로서의 본질에 대한 심상의 구성을 중시하는 수학화 접근법에서 볼 때 전도된 것이다.

⑪ 전형적인 보기를 통한 개념 지도방법(프로이덴탈)

1. 귀납적 이해(comprehension)(프로이덴탈이 비판함)
   - 여러 가지 보기의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것
2. 각지(apprehension)
   - 전형적인 보기로부터 곧바로 그 구조를 파악하여 획득하는 것

(12) 수업에서의 수학화 과정의 네 단계

1. 현실 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계
   - 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 것을 의미한다.
2. 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 수평적 수학화의 단계
   - 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다.
3. 형식화와 추상화가 중심인 수직적 수학화의 단계
   - 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다.
4. 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 응용적 수학화의 단계

(13) 5단계 기하 학습 수준(반 힐레)

1. 제1수준: 시각적 인식 수준
   - 특징: 전체적인 모양새로 도형을 인식한다.
   - 한계: 도형의 성질에 주목하지 않는다.
2. 제2수준: 기술적/분석적 인식 수준
   - 특징: 도형의 성질에 주목하며 도형의 성질을 분석할 수 있다.
   - 한계: 도형들 사이의 포함 관계를 모호하게 인식하며, 도형에 대한 개인적 특성화에 의해 포함 관계를 거부하기도 한다.
3. 제3수준: 관계적/추상적 인식 수준
   - 특징: 도형의 성질이나 도형 자체가 논리적으로 정렬된다.
   - 한계: 연역적 추론(형식적 증명)을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계를 파악하는 정도에는 이르지 못한다.
4. 제4수준: 형식적 연역 수준
   - 특징: 연역의 의미가 전반적으로 이해된다.
5. 제5수준: 엄밀한 수학적 수준
   - 특징: 대상의 구체적 성질이나 그 성질들 사이의 관계의 구체적 의미가 사상된다.

(14) 기하 학습 수준의 특징(반 힐레)

1. 사고는 상대적인 수준이 있는 불연속적인 활동으로서 수학 학습에서 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 순차적으로 거쳐서 발달하게 된다는 것이다.
2. 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것은 아니며, 수준의 이행은 적절한 학습 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다는 것이다.
3. 더 높은 수준에서는 낮은 수준에서의 행동이 분석의 대상이 된다는 것이다.
4. 각 수준이 그 자체의 언어적 상징과 그 상징들을 연결하는 관계 체계를 가지고 있음을 의미한다.
5. 서로 다른 수준에서 추론하는 두 사람은 서로를 이해할 수 없다는 것이다.

(15) 기하 학습 수준에서 사고의 대상과 사고의 수단

수준	1수준	2수준	3수준	4수준	5수준
사고의 대상	주변사물	도형	성질	명제	논리
사고의 수단	도형	성질	명제	논리	

(16) 기하 학습 수준의 상승을 위한 교수·학습 단계(반 힐레)

1. 1단계: 탐색 단계(inquiry)
   - 교사와 학생 사이의 대화를 통해서 새로운 학습 주제를 소개한다.
2. 2단계: 안내된 탐구 단계(directed orientation)
   - 학생은 신중하게 계열화된 활동을 통해 새로운 학습 주제의 특징에 익숙해진다.
3. 3단계: 명료화 단계(explication)
   - 학생은 교사의 개입이 최소인 상태에서 자신의 개념화와 어휘를 정련시킨다.
4. 4단계: 자유 탐구 단계(free orientation)
   - 학생은 문제해결의 성격을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전하게 된다.
5. 5단계: 통합 단계(integration)
   - 학생은 자신의 관찰을 재검토하고 요약하며, 대상과 관계의 새로운 그물망을 형성하기 위해 그 동안 배운 새로운 개념과 관련성을 통합한다.

(17) 교수학적 변환론의 핵심적인 문제(이경화, 1996b)

1. 첫 번째는 교수 체계는 삼원적 관계(교사—지식—학생)라는 것이다.
   - 삼원적 관계로서만 교육 현상을 올바르게 이해할 수 있다는 것이다.
2. 두 번째 문제의식은 지식의 파손성에 대한 것이다.
   - 지식은 주의 깊게 다루지 않으면 본래의 의미가 손상되기 쉽다.

(18) 지식의 변형 과정(브루소)

개인화/배경화 과정	탈개인화/탈배경화 과정
• 개인에게 의미 있는 지식이 형성되는 과정 • 수학적 지식의 이면에 들어 있는 아이디어를 살려내어 다루는 것 • ‘형식적 수학 지식’이라는 뼈대위에 살을 입혀서 수학 지식의 맥락과 의미를 보다 풍부하게 하는 것	• 방만하게 확장된 지식이 형식적으로 안정된 형태로 정돈되는 과정 • 이면의 아이디어를 살려낸 지식을 구조적으로 정돈하는 것 • 여러 가지 맥락과 개인적 의미를 제거함으로써 개인화/배경화된 지식을 형식적인 수학적 지식으로 이해하는 것

(19) 극단적인 교수학적 현상(브루소)

1. 메타-인지 이동(개인화/배경화 강조)
   - 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하기 위해 도입된 교수학적 보조 수단에 학생들의 사고가 집중되는 현상
2. 형식적 고착(개인화/배경화 간과)
   - 공식화된 지식의 논리적 표현에만 의존하는 교수 현상
   - 개인화/배경화 측면을 간과하고 수학적 지식의 형식적 형식만을 연습시키는 것
3. 토파즈식 외면치레(탈개인화/탈배경화 강조)
   - 탈개인화/탈배경화 측면을 강조함에 따라 발생하며, 학생이 학습할 수 있는 환경을 교사가 제거하는 것
   - 교사는 가르쳐야 하고 학생은 배워야 한다는 소위 ‘교수학적 계약(didactical contract)’에 의한 압박에서 일어나는 전형적인 현상
4. 조르단식 외면치레(탈개인화/탈배경화 간과)
   - 탈개인화/탈배경화 측면을 간과하여, 학생의 사소한 행동을 보고 학생이 특정한 수학 지식을 형성했다고 과대평가하여 잘못 판단하는 경우

(20) 인식론적 장애(브루소)

어떤 특정 맥락에서는 성공적이고 유용한 지식으로서 학생의 인지구조의 일부가 되어 있지만, 새로운 문제해결이나 개념 이해의 상황이나 더 넓어진 문맥 등에서는 부적합해진 지식

(21) 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인

1. 일상어
   - 자생적 관념인 용어의 일상적인 의미는 생존력이 강하여 수학을 학습하면서 사라지는 것이 아니라 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학 학습에 장애로서 작용하게 된다.
2. 직관
   - 실제적인 여러 가지 수학적 사고는 직관적으로 이루어지지 않을 수 없다고 하더라도, 수학은 직관을 배제하고 논리적, 형식적으로 전개되는 사고 패턴으로, 특히 직관은 무한 개념이나 극한 개념의 학습에 장애가 된다.
3. 과도한 일반화
   - 무한의 세계에는 일반화와 유추가 성립하지 않으며 무한은 '논리적으로' 이해되어야 하는 개념이다.
4. 은유
   - 수학에서의 은유는 유추와 마찬가지로 신뢰할 수 없는 비형식적 지식으로 사용되고 확실한 지식으로 그 기능을 인정받지는 못한다.

(22) 공학적 도구의 방법론적 측면에서의 기여

1. 수학과 학생들의 실제 경험의 연결(통계 영역)
   - 학생들의 일상적이고 물리적인 경험에 바탕을 둔 실제 자료와 시뮬레이션을 함께 제시함으로써, 다양한 모델과 시뮬레이션을 통해 학생들의 광범위한 경험과 형식적인 수학을 연결할 수 있게 한다.
2. 수학적 대상과 관계의 구체화(기하 영역)
   - 구체적-추상적 대상: 컴퓨터 화면에서 실제로 존재하는 것처럼 볼 수 있고 다룰 수 있다는 의미에서 구체적이라고 할 수 있으며, 컴퓨터 구현에 따른 산출물 내지 결과가 수학적 구성물이라는 의미에서 추상적이라고 할 수 있다.
3. 다양한 표현 체계의 연결(함수 영역)
   - 수학의 다양한 표현을 같은 화면에 제공함으로써, 학생들로 하여금 다양한 표현을 서로 연결 짓게 함으로써 그 표현에 내재되어 있는 의미를 보다 충실하게 이해할 수 있도록 한다.
4. 사고력 중심의 수학교육 추구(수와 연산, 문자식 영역)
   - 사고력 향상을 목적으로 하는 교수·학습 활동에서 산술적인 계산과 대수적인 문자식의 처리를 신속하게 수행해 줌으로써 본질적인 사고력 중심의 교수·학습 활동에 전념할 수 있게 해 준다.

(23) 컴퓨터를 활용한 교수·학습의 양식

1. 개인 교사형
   - 전통적인 교사의 역할을 컴퓨터가 대신하는 양식
2. 학생 주도형
   - 학생이 컴퓨터를 지도하는 역할을 함
   - 학생은 자신이 구성하여 입력하는 일련의 논리적인 단계를 통해 컴퓨터가 행동을 수행하도록 컴퓨터를 프로그램(지도)하고 그 결과를 살펴봄으로써 자신의 사고 과정을 반성하게 하고, 나중의 수학 학습에 도움을 얻게 된다.
3. 보조 도구형
   - 컴퓨터를 보조 도구로서 사용하는 양식
   - 수학적 개념을 이해하기 위하여 반복적인 과정을 필요로 하는 경우에 그러한 반복적인 중간 과정을 신속하게 처리해 줌으로써 학생들이 시간을 효율적으로 사용할 수 있게 해 준다.
4. 탐구 학습형
   - 학생 주도형과 보조 도구형이 결합된 양식
   - 학생들이 대상들 간의 관계를 탐구할 수 있게 해 준다는 것이다. 이때 탐구는 컴퓨터의 통제하에 이루어지는 것이 아니라 전적으로 학생의 통제하에 이루어진다.

Ⅰ. 수학과 교육과정 (신론2, 2022 개정증보판)

(1) 우리나라 수학과 교육과정의 특징

기별	특징
교수 요목기	• 가르칠 주제를 열거한 교수 요목의 형태 • 해방 전의 교육 내용의 답습 • 내용이 어렵고 과다
제1차	• 경험 중심 교육과정 • 생활 단원 학습 • 수학 용어의 한글화
제2차	• 교과 중심 교육과정 • 수학의 계통성 중시 • 기초 학력 배양
제3차	• 학문 중심 교육과정 • 수학교육 현대화 운동의 정신 반영 • 수학 내용의 조기 도입 • 수학적 구조와 엄밀성 강조
제4차	• 수학교육 현대화 운동의 반성 • ‘기본으로 돌아가기’ 정신의 반영 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소
제5차	• 문제 해결력의 강조 • 기초 학력 배양 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소
제6차	• 문제 해결력의 강조 • 다양한 교수·학습 및 평가 방법 권장 • 계산기와 컴퓨터 활용 권장 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소
제7차	• 수준별 교육과정 (단계형, 과목 선택형) • 학습자 중심 교육과정 • 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소 • 문제해결 및 고등 사고 능력의 신장
2015 개정	• 수학 교과 역량의 구현 • 학습 부담 경감 추구 • 학습자의 정의적 측면 강조 • 실생활 중심의 통계 내용 재구성 • 공학적 도구의 활용 강조
2022 개정	• 핵심 아이디어 중심의 깊이 있는 학습 추구 • 지능정보화 사회 대비 내용 재구조화 • 실생활 자료 중심의 통계 교육 내용 재구조화 • 고교학점제 시행을 위한 과목 구조 및 내용 재구조화

(2) 중학교 <수학> 과목 내용 체계 (2015 개정)

영역	내용 요소		
수와 연산	• 소인수분해 • 정수와 유리수	• 유리수와 순환소수	• 제곱근과 실수
문자와 식	• 문자의 사용과 식의 계산	• 식의 계산	• 다항식의 곱셈과 인수분해
	• 일차방정식	• 일차부등식과 연립일차 방정식	• 이차방정식
함수	• 좌표평면과 그래프	• 일차함수와 그래프 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수와 그래프
기하	• 기본 도형 • 작도와 합동 • 평면도형의 성질	• 삼각형과 사각형의 성질 • 도형의 닮음 • 피타고라스 정리	• 삼각비 • 원의 성질
	• 입체도형의 성질		
확률과 통계		• 확률과 그 기본성질	
	• 자료의 정리와 해석		• 대푯값과 산포도 • 상관관계

(3) 고등학교 <수학> 과목 내용 체계 (2015 개정)

영역	내용 요소
문자와 식	• 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
	• 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식과 부등식
기하	• 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식 • 도형의 이동
수와 연산	• 집합, 명제
함수	• 함수, 유리함수와 무리함수
확률과 통계	• 경우의 수, 순열과 조합

(4) 중학교 <수학> 과목 내용 체계 (2022 개정)

영역	내용 요소		
수와 연산	• 소인수분해 • 정수와 유리수	• 유리수와 순환소수	• 제곱근과 실수
변화와 관계	• 문자의 사용과 식 • 일차방정식 • 좌표평면과 그래프	• 식의 계산 • 일차부등식 • 연립일차방정식 • 일차함수와 그래프 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 다항식의 곱셈과 인수분해 • 이차방정식 • 이차함수와 그 그래프
도형과 측정	• 기본 도형 • 작도와 합동 • 평면도형의 성질 • 입체도형의 성질	• 삼각형과 사각형의 성질 • 도형의 닮음 • 피타고라스 정리	• 삼각비 • 원의 성질
자료와 가능성	• 대푯값 • 도수분포표와 상대도수	• 경우의 수와 확률	• 산포도 • 상자그림과 산점도

(5) 고등학교 <공통수학1> 과목 내용 체계 (2022 개정)

영역	내용 요소
다항식	• 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식과 부등식
경우의 수	• 합의 법칙과 곱의 법칙, 순열과 조합
행렬	• 행렬과 그 연산

(6) 고등학교 <공통수학2> 과목 내용 체계 (2022 개정)

영역	내용 요소
도형의 방정식	• 평면좌표, 직선의 방정식 • 원의 방정식, 도형의 이동
집합과 명제	• 집합, 명제
함수와 그래프	• 함수, 유리함수와 무리함수

(7) 2022 개정 수학과 교육과정 개정의 주요 사항

2015 개정 수학과 교육과정	2022 개정 수학과 교육과정
1. 수학 교과 역량의 변화 (6개→5개)	
• 문제해결, 추론, 의사소통, 창의·융합, 정보처리 태도 및 실천	• 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리
2. 과목 구조 개편 (일반 선택 과목: 4개→3개)	
• 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계	• 대수, 미적분Ⅰ, 확률과 통계
3. 영역명 변경 (중학교)	
• 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계	• 수와 연산, 변화와 관계, 도형과 측정, 자료와 가능성

(8) 중학교 <수학> 내용의 핵심 변화 (2022 개정)

영역	변화
변화와 관계	• 이차함수의 최댓값과 최솟값을 실수 전체 범위에서 다룸(고1→중3) • '최댓값', '최솟값' 용어 추가(고1→중3)
도형과 측정	• '증명' 용어 추가(고1→중2) • 수학사를 통하여 피타고라스 정리, 삼각비 지도(성취기준 적용 시 고려 사항)(중2)
자료와 가능성	• '평균' 삭제, 대푯값 이동(중3→중1) • '상자그림' 추가(중3) • '사분위수', '상자그림' 용어 추가(중3)

(9) 고등학교 수학 내용의 핵심 변화 (2022 개정)

영역	변화
<공통수학1>	• '행렬' 추가(행렬)
<공통수학2>	• '외분' 삭제(도형의 방정식)
<확률과 통계>	• '원순열' 삭제, '모비율' 추가
<미적분Ⅰ>	• '정적분' 정의 방식의 변화

(10) 정당화(justification)

자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 의미한다. 이러한 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다.

Ⅱ. 수학과 평가

(1) 수행평가 채점 절차

1. 모범 답안 및 채점 기준 작성
2. 평가 실시
3. 가채점 실시
   - 가채점의 중요성: 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 생각하지 못하였던 채점 요소나 또는 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고 미비한 부분을 보완하고 수정하기 위함이다.
4. 채점 기준 검토 및 수정

(2) 평가의 기본 절차

1. 평가 목적 설정: 진단평가, 형성평가, 총괄평가
2. 평가 영역 및 목표 선정
3. 평가틀 개발(평가 방법 선정)
4. 평가도구 개발
5. 평가 실시
6. 채점 및 결과 보고

(3) 학생의 수행 과정을 채점하는 방법

1. 분석적 점수화 방법
   - 주어진 문제를 해결하는데 있어서 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법
2. 총체적 점수화 방법
   - 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하지 않고, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법

(4) 분석적 점수화 방법으로 채점할 때 주의할 점

1. 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 가급적 영향을 주어서는 안 된다.
2. 문항마다 채점 기준을 너무 세분화하지 않도록 한다.

(5) 분석적 점수화 방법의 장단점

1. 학생 개개인의 답안지를 면밀하게 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 한다.
2. 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화된 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있는 주요 장점이 있다.

(6) 프로젝트의 의미

1. 무엇을 할 것인가 뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다.
2. 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말한다.
   - 개방형 문제: 해답이 정해져 있지 않고 문제 해결자의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제

(7) 프로젝트의 특징

1. 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 한다.
2. 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고, 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.
3. 소그룹의 협동 학습을 통하여 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

(8) 포트폴리오의 의미

하나 이상의 주제나 문제에 대한 해결 과정을 모두 기록함과 아울러, 이들에 대한 반성적 자기평가 결과들을 모아 둔 것을 말한다.

(9) 포트폴리오 평가의 장점

1. 포트폴리오 평가에 의해 학생들은 자기 자신의 변화 과정을 알 수 있고 자신의 장점이나 약점, 성실성 여부, 잠재 가능성 등을 스스로 인식할 수 있다.
2. 교사들은 학생들의 과거와 현재의 상태를 쉽게 파악할 수 있을 뿐 아니라 앞으로의 발전 방향에 대한 조언을 할 수 있다.

(10) 관찰 및 면담의 장점

1. 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역 뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지를 평가할 수 있는 장점이 있다.
2. 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다.

(11) 관찰 및 면담의 기록 방법

1. 일화기록법
   - 한 개인을 대상으로 구체적인 행동 사례를 간략하게 기술하는 방법
2. 체크리스트
   - 관찰(또는 면담)하려는 행동 단위를 미리 분류하고, 이것을 기초로 그러한 행동이 나타났을 때 표시하는 방법
3. 평정척도법
   - 관찰 또는 면담하는 대상을 일정한 척도에 따라 분류하고 측정하는 방법

Ⅰ. 수학 문제해결 교육론 (신론3, 2022 초판)

(1) 문제의 분류

1. 정형 문제(routine problems)
   - 이미 제시된 알고리즘을 사용하여, 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제
2. 비정형 문제(non-routine problems)
   - 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 구안하여 풀어야 하는 문제

(2) 문제해결 행동 관련 요인(숀펠드)

1. 자원(resources)
   - 문제를 해결하기 위해 개인이 사용할 수 있는 도구와 기법
2. 발견술(heuristics)
   - 생소하고 비정형적인 문제를 해결하기 위한 전략과 기술
3. 통제(control)
   - 자원과 전략의 선택과 수행에 관한 전반적인 결정 능력
4. 신념 체계(belief systems)
   - 학습자가 수학에 대해 가지고 있는 가치관이나 선입견 같은 것

(3) 지식 구분(폴리아와 쉐플러)

1. 정보(know that)(폴리아)
   - 어떤 명제를 안다는 점에서 ‘명제적 지식’으로 명명(쉐플러)
2. 방법적 지식(know how)(폴리아)
   - 어떤 행위의 진행 순서를 안다는 점에서 ‘절차적 지식’으로 명명(쉐플러)

(4) 분석법과 종합법

1. 분석법
   - 구하거나 증명하고자 하는 것을 이미 구하거나 증명한 것처럼 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고, 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속하여, 이미 알고 있는 명제에 도달하는 과정
   - 풀이 계획을 발견하는 과정
2. 종합법
   - 분석의 과정을 거꾸로 하여 분석에서 마지막에 도달한 지점, 곧 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제로부터 출발하여 분석 과정을 거꾸로 되밟아 감으로써, 마지막에 요구하는 명제에 도달하는 과정
   - 그 계획을 실행하는 과정

⑤ 분석법의 형태

1. 명제의 증명에서의 분석법(증명문제)
   - 증명하고자 하는 명제가 이미 성립하는 것처럼 가정하고 그 명제가 선행하는 어떤 명제로부터 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자는 무엇인가를 묻는 방식으로 계속하여 충분조건을 계속 찾아감으로써 이미 참임이 드러난 명제에 도달하는 방법
2. 도형의 작도에서의 분석법(답을 구하는 문제)
   - 주어진 조건을 만족하는 도형을 작도하는 방법을 발견하기 위하여 도형을 작도했다고 가정하고 그 도형을 작도하기 위하여 필요한 도형을 찾아 작도하는 방법
3. 방정식 풀이에서의 분석법(답을 구하는 문제)
   - 방정식이 풀린 것으로 가정하고 등식의 성질을 적용하여 방정식을 거듭 변형하여 필요조건을 찾아 해결하는 방법

(6) 수학적 사고 과정(폴리아)

수학적 사고 과정에서 먼저 귀납, 유추, 추측이 있은 다음 증명이 뒤따라야 하며, 따라서 수학자의 창조적인 연구의 결과는 연역적 추론, 즉 증명이지만, 그 증명은 개연적 추론과 추측에 의해 발견된다고 보았다.

(7) 문제해결 과정(숀펠드)

이해 → 계획 → 탐구 → 실행 → 검증

(8) 문제해결 과정 4단계(폴리아)

1. 문제 이해 단계(understanding the problem)
   - 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제를 분석하는 단계
2. 해결 계획 단계(devising a plan)
   - 문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계
3. 계획 실행 단계(carrying out the plan)
   - 해결 계획에 따라 실행하는 단계
4. 반성 단계(looking back)
   - 문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 보는 단계

(9) 해결 계획 단계에서의 보조문제 고려하기(폴리아)

1. 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조문제를 고려해야 한다.
2. 보조문제의 장점: 보조문제를 해결한 방법이 원래 문제를 해결하는 데 실마리를 제공한다.

(10) 반성 단계에서의 적절한 발문(폴리아)

1. 풀이 과정이나 결과를 점검할 수 있는가?
2. 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?
3. 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

⑪ 수학 학습-지도 원리(폴리아)(2010학년도 객관식 2번)

1. 활동적 학습의 원리
   - 학습자는 주어진 상황에서 배워야 할 내용을 스스로 발견해야 한다.
2. 최선의 동기유발 원리
   - 학습자는 배울 내용에 대해서 흥미를 가져야 하며 학습 활동에서 즐거움을 찾을 수 있어야 한다.
3. 비약 없는 단계의 원리
   - 효과적인 학습은 탐구 단계를 지나 언어화와 개념 형성 단계로 나아가야 하며 학습자의 정신적 태도의 통합과 형성에 기여해야 한다.

(12) 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

1. 현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고 문제에 영향을 미치는 중요한 요인들을 찾는다.
2. 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
3. 적절한 수학적 분석을 그 모델에 적용한다.
4. 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출한다.

(13) 수학적 모델링을 통하여 수학교육에서 달성할 수 있는 목적

1. 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
2. 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
3. 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
4. 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기른다.
5. 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해한다.

(14) 'What-if-not' 전략(브라운&월터)

1. 출발점 선택하기
2. 속성 열거하기: 문제를 구성하고 있는 요소나 속성을 모두 열거해 본다.
3. 'What if not' 수행하기(속성 부정하기): 전 단계에서 열거한 속성이 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가'라는 의문을 가져 본다.
4. 문제제기 하기: 전 단계에서 생각한 의문을 기초로 새로운 문제를 만든다.
5. 설정된 문제 분석하기: 새로 만든 문제를 분석하거나 해를 구한다.

(15) 문제 제기의 구분(폴리아)

1. 문제해결 과정의 계획 단계에서 문제를 해결하기 위한 수단으로써 유사한 문제를 생각해 보는 것
2. 문제를 해결한 후 반성 단계에서 결과를 이용하여 새로운 문제를 제기하는 것

(16) 문제 제기의 역할과 중요성

1. 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현에 도움을 준다.
2. 탐구 지향적인 학습 태도를 길러 준다.
3. 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단이 된다.
4. 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용할 수 있는 기회를 제공한다.
5. 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
6. 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단이 된다.

(17) 문제중심학습(PBL)의 이해(수학교육학 정론)

실생활에서 접하게 되는 문제와 유사한 비구조적인 문제 상황의 제시로부터 학습을 시작하고 학습자가 문제를 해결하기 위해 필요한 지식과 정보를 스스로 탐구하여 적절한 해결안을 찾는 과정을 통하여 학습을 하는 교수·학습 방법

(18) 귀납추론

관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음에, 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참임을 주장하는 것

(19) 유비추론(유추)

A라는 대상과 B라는 대상이 서로 유사할 때, A에서 성립하는 성질 P(A)와 유사한 성질 P(B)가 대상 B에서 성립할 것이라고 주장하는 것

(20) 귀납추론, 유비추론의 공통적인 특징 및 한계

수학적 발견에 중요한 도구이며 개연성이 높은 추론 방식이지만, 귀납(유비)추론을 통해 발견된 수학적 추측이 항상 참인 명제인 것은 아니다.

㉑ 귀납추론에 의한 오류의 종류

1. 선입견이나 부주의 등으로 관찰해야 할 사례를 간과하는 데에서 오는 오류
2. 착각이나 편견 등으로 인하여 왜곡된 관찰을 하는 데에서 오는 오류
3. 조급하게 일반화하는 데에서 오는 오류
4. 검증 없이 사실의 단순한 열거만으로 일반화하려는 오류

㉒ 연역추론의 특징과 한계

옳은 전제로부터 반드시 옳은 결론을 이끌어 내므로 지식을 확립하지만 전제 속에 들어 있지 않은 내용을 이끌어 낼 수는 없으며, 근본적으로 새로운 지식으로 내용을 확장할 수 없다.

(23) 문제해결 전략(핵심적인 내용)

1. 예상과 확인
   - 문제의 답을 미리 예상해 보고 그 답이 문제의 조건에 맞는지 확인해 보는 과정을 반복하여 문제를 해결해 나아가는 전략
2. 거꾸로 풀기
   - 문제 목표나 증명해야 할 사실로부터 시작하여 무엇을 말할 수 있는가를 생각해 나가는 방법
3. 단순화하기
   - 변수의 개수를 줄이거나 주어진 문제보다 좀 더 익숙하고 단순한 문제 상황으로 바꾸어 해결하고, 이 해결 과정을 본 문제에 적용하거나 원래의 문제를 몇 개의 부분적인 문제로 나누어 그들을 해결함으로써 원래의 문제를 쉽게 해결하는 방법
4. 특수화하기
   - 일반적인 경우에 대한 문제가 주어졌을 때, 문제에서 구하려는 것이 무엇인가를 파악하고 구하려는 대상에 포함되는 특수한 대상을 선택하여 이에 대한 고찰을 통해 문제를 해결하는 방법
5. 귀류법
   - 결론을 부정하였을 때 부정된 결론으로부터 가정과 모순되는 사실을 유도함으로써 결론이 참이어야 함을 보이는 방법

Ⅱ. 교수학적 변환과 수학적 의사소통

(1) 교수학적 상황론(브루소)

1. 교수학적 상황(didactical situation)
   - 교사가 학생들에게 수업을 위해 계획한 지식을 전달하고 학생은 학습 활동을 통해서 지식을 획득하게 되는 상황
2. 비교수학적 상황(adidactical situation)
   - 교사의 중재 없이도 학생들이 스스로 자신의 수학적 지식을 문제 해결의 도구로 활용할 수 있는 상황

② 교수학적 계약(브루소)(수학-학습 지도 원리와 방법)

'교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.'는 교사와 학생이 상보적인 책임과 의무를 갖는 명백하면서도 묵시적인 것

(3) 딘즈 효과(Dienes Effect)(브루소)

수업 상황에서 교사에 의해 교수학적 계약이 이행되지 않는 경우

(4) 교수학적 계약의 이행 문제(브루소)

1. 딘즈 효과는 교사가 자신이 해야 하는 교수학적 의무를 다하지 않아 학생의 학습이 적절하게 이루어지지 않는 상황을 의미하는 것이다.
2. 교사에 의해 교수학적 계약이 과도하게 이행될 경우 교사는 자신이 준비한 상황을 강요하게 될 수 있고, 학생은 교사에 의한 지도를 수동적으로 받아들여 능동적인 학습을 하지 않을 수 있다.

(5) 수학 교수학적 상황의 4단계(브루소)

1. 행동(Action) 상황
   - 수학적 지식을 암묵적으로 사용함(신론3)
   - 도구적 이해 수준(수학-학습 지도 원리와 방법)
2. 형식화(Formulation) 상황
   - 수학적 지식을 의식하고 형식적 형태로 표현함(신론3)
   - 직관적 이해 수준(수학-학습 지도 원리와 방법)
3. 타당화(Validation) 상황
   - 형식적 형태로 표현된 지식의 타당성을 확인함(신론3)
   - 관계적 이해 수준(수학-학습 지도 원리와 방법)
4. 제도화(Institutionalization) 상황
   - 학생들이 만든 지식을 공식적으로 승인하고, 이전 지식과 연결함(신론3)
   - 논리적 이해 수준(수학-학습 지도 원리와 방법)

(6) 수학적 개념의 발달 단계(브루소)

1. 원형 수학적 개념 단계(무의식적, 암묵적)
   - 무의식적이고 암묵적으로 문제 해결에 사용되는 수학적인 관념의 상태이며, 학생들은 자신이 가진 개념을 인식하지 못한다.
2. 의사 수학적 개념 단계(의식적, 비형식적)
   - 암묵적으로 사용되던 원형 수학적 개념이 문제해결의 도구로 의식적으로 사용되지만, 의미를 중심으로 활용되는 정도에 그치고 인지 구조에 조직되어 정착되지는 않은 상태이다. 학생들은 개념을 나타낼 때 비형식적이고 친숙한 용어나 기호를 사용한다.
3. 수학적 개념 단계(의식적, 형식적)
   - 개념이 형식적인 형태로 인지 구조에 조직된다. 개념 자체가 완전히 대상화되어 또 다른 개념 학습을 위한 분석의 대상이 될 수 있는 상태가 된다.

(7) 인지적 장애의 종류와 근원(브루소)

1. 개체발생적 근원
   - 학생들의 발달에 따른 신경생리학적인 원인으로 나타나는 장애
2. 교수학적 근원
   - 교육체제, 교육과정 내에서 교수·학습 내용 및 방법을 선택하거나 수업에 반영할 때 나타나는 장애
3. 인식론적 근원
   - 특정 맥락에서 성공적이고 유용하여 학생의 인지 구조의 일부가 되었지만 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식

◎ 교직수학

(1), (2), (3), ⋯ : 수교재(제3판)
①, ②, ③, ⋯ : 학교수학의 교육적 기초 상·중·하

Ⅰ. 수와 연산

(1) 수 개념의 추상에 대한 관점

1. 경험론(사물에 의한 방법)
   - 수 개념이 사물 자체가 가지고 있는 본질적인 특성이므로 인간의 의식이 그것을 포착하기만 하면 추상화될 수 있는 것이라고 생각
   - 수가 사물 자체의 속성이며 그것을 직관함으로써 수 개념이 형성된다는 관점
2. 관념론(기호에 의한 방법)
   - 수를 이루는 기초적인 개념이 구체적인 사물에 대한 경험과는 무관하게 선천적으로 타고나는 것이기 때문에 이를 출발점으로 하는 추상적인 추론 과정만 있으면 수 개념을 형성할 수 있을 것이라 생각
   - 수 개념이 구체적인 사물에 대한 경험과는 독립적으로 형성될 수 있다는 관점

(2) 수 개념에 대한 관점

1. 듀이: 사물을 다루는 인간의 ‘활동으로부터’ 수 개념이 발생한다고 봄
2. 피아제: 수 개념과 같은 논리·수학적 개념은 사물의 속성을 추상함으로써 얻어지는 것이 아니라 사물에 대한 인간의 행동을 추상함으로써 형성되는 것이라 주장함

(3) 구성적 활동의 방법(듀이의 산술 지도 방법)

1. 모호한 전체(명확히 규정될 필요가 있는 한정된 크기나 양)
   - 그 양이 명확하게 규정되지 않은 상태의, 즉 측정이 이루어지기 이전의 대상이라고 할 수 있는 ‘모호한 전체’를 경험하는 단계
2. 전체를 (명확하게) 구성하는 데 도움이 되는 부분(단위)
   - 측정을 위한 단위를 파악하는 단계
3. 명확한 전체를 구성하는 측정의 과정(수 값의 결정)
   - 모호한 전체를 단위의 반복을 통하여 표현함으로써 명확한 전체로 나타내는 단계

(4) 고정 단위 방법(듀이의 비판)

개개의 사물이 질적으로 구별된다는 것을 전제로 하여 개별 사물을 단위로 고정하는 것

(5) 음수 지도 모델(셈돌 모델)

1. 셈돌 모델의 특징
   - ‘검은 돌 하나와 흰 돌 하나는 같이 없앨 수 있다.’는 소멸법칙을 이해하여야 한다.
2. 셈돌 모델의 장점과 한계점
   - 덧셈과 뺄셈이 비교적 자연스럽게 설명되는 반면, 곱셈과 나눗셈을 설명하는 데에는 한계를 갖는다.

$4-(-2)=6$	●●●● (●● / ○○) − ○○ → ●●●●●●

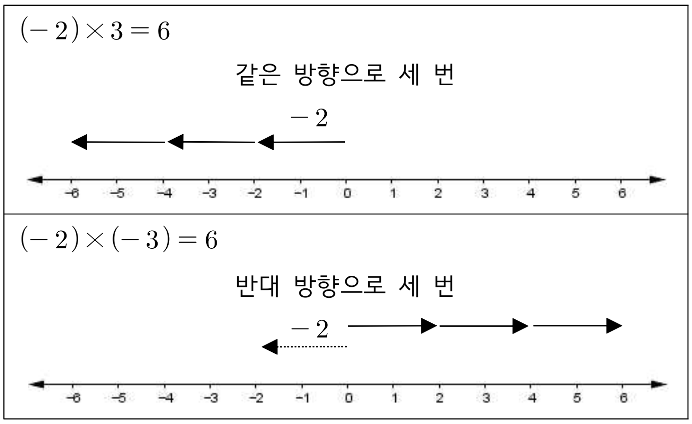
(6) 음수 지도 모델(우체부 모델)

1. 우체부 모델의 특징
   - 어음은 양수, 고지서는 음수를 나타내며, ‘가져오는 것’은 덧셈, ‘가져가는 것’은 뺄셈을 나타내는 것으로 이해할 수 있다.
   - 곱셈에서는 피승수를 고지서와 어음으로 해석하고 승수는 우체부가 가져온 것의 개수(양수인 경우)나 가져간 것의 개수(음수인 경우)로 해석한다.
2. 우체부 모델의 장점
   - 일상적으로 일어나는 현상을 통하여 음수 개념의 필요성을 제기하고 실제적인 맥락에서 음수의 의미를 해석할 수 있는 상황을 제공한다.

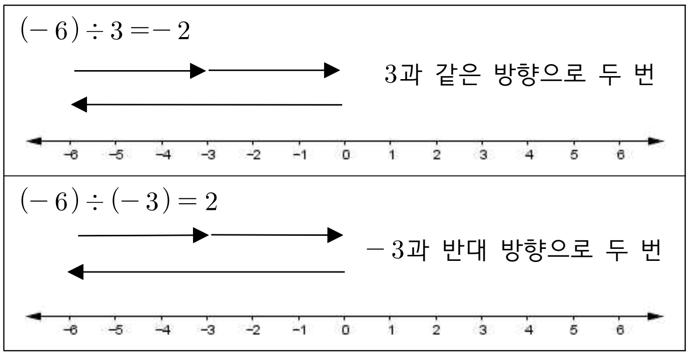
$(-2)\times(-3)=6$	우체부가 철수에게 2원짜리 고지서를 3장 가져갔다. 철수에게는 6원의 소득이 생겼다.

(7) 음수 지도 모델(수직선 모델)

1. 수직선 모델의 특징과 장점
   - 수직선 모델에서는 '크기' 외에도 '방향'이라는 요소가 음수 개념에 포함되어야 한다.
   - 수직선상에서 정수가 배열되는 방식은 '순서 구조'를 그대로 유지하고 있다는 장점이 있다.
2. 수직선 모델의 약점
   - 음의 부호가 갖는 다중적인 의미가 수직선 모델을 통해 분명하게 드러난다는 것(왼쪽을 향한다, 반대 방향)



3. 수직선 모델에서의 나눗셈
   - 반복되는 뺄셈을 통하여 피제수를 나타내는 화살표를 원점으로 줄이는 과정으로 설명된다.
   - 단, 줄이는 방향이 제수의 반대 방향일 때 그 결과를 양으로 간주한다.



⑧ 구체적인 모델의 한계를 보완하기 위한 지도 방법

1. 형식불역의 원리(역사 발생적 원리에 따른 방법)
   - 자연수 a에 대하여 방정식 $x+a=0$을 만족하는 해를 $-a$라고 음의 정수를 정의하여 수 체계를 정수로 확장하고, 형식불역의 원리에 의해 자연수의 연산법칙이 그대로 보존된다고 보면 정수의 계산법칙을 이끌어낼 수 있다.
2. 귀납적 외삽법(교육과정에 따른 방법)

(9) 유리수의 정의

유리수 $\dfrac{b}{a}$는 방정식 $a\times x=b$의 해(단, a와 b는 정수이고 $a\neq 0$)

⑩ 유한소수를 순환소수로 나타내는 것을 다루지 않는 이유

1. $0=0.000\cdots$에 대응하는 소수가 없으므로 실수와 무한소수 사이의 1대1 대응이 성립하지 않게 된다.
2. 나눗셈 알고리즘에 따르면 '임의의 정수 a, $b(>0)$에 의하여 $a=bq+r$, $0\leq r<b$인 정수 q, r이 단 한 쌍 존재한다.'인데, 이에 맞지 않는다.
   - $1\div 2$는 0.5가 되어야 하는데, $0.4999\cdots$도 될 수 있다고 하면 문제가 발생한다.
3. 급수 개념으로 인해 중학교 수준에서 지도하기 어렵다.
4. 사칙계산을 지도하기 어렵다.
   - 두 유한소수를 순환소수로 나타내어 더한 것의 결과가 $0.1999\cdots+0.7999\cdots=1$이라는 것은 지도하기 어렵다.

⑪ 무리수 지도

1. 통약불가능성에 따른 지도
   - 통약가능의 의미: 같은 단위로 측정할 수 있는 두 선분의 길이의 비는 분수로 나타낼 수 있다.
   - 정사각형의 한 변과 대각선의 길이 사이에는 공통 측정단위가 없으므로 통약불가능하다.
2. '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'에 대한 설명
   - 유리수는 정수와 정수가 아닌 유리수로 분류한다.
   - $1<2<4$에서 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $\sqrt{2}$는 정수가 아니다.
   - 정수가 아닌 유리수는 분모가 1이 아닌 기약분수로 나타낼 수 있고 그 기약분수를 제곱하면 분모가 1이 아닌 기약분수가 된다. 그러나 $\sqrt{2}$를 제곱하면 2가 되며 2는 기약분수가 아니므로 $\sqrt{2}$도 기약분수가 아니다. 따라서 $\sqrt{2}$는 정수가 아닌 유리수가 아니다.

(12) 가능적 무한과 실무한

1. 가능적 무한
   - 계속 그것을 향해가는 것만을 생각할 수 있기 때문에 가능성으로만 생각하는 무한
2. 실무한
   - '무한'이라는 것을 존재하는 실체로 여기는 입장에서 포착한 무한

Ⅱ. 대수

(1) 대수의 발달 단계

1. 언어적 대수 단계(디오판토스 이전 시대)
   - 문제를 해결하기 위하여 일상적인 언어 표현을 사용했고 미지수를 표현하기 위해서 특정 부호나 기호를 사용하지 않은 것이 특징
2. 생략적 대수(디오판토스 시대에서부터 16세기 말까지)
   - 자주 반복되어 사용되는 개념이나 계산을 축약된 용어나 머리글자와 같은 생략 기호를 사용하여 나타낸 단계
3. 기호적 대수(비에타의 시대에서부터 그 이후)
   - 문자를 미지의 양뿐만 아니라 주어진 양을 나타내는 데에도 사용
   - 일반해를 나타내는 것, 법칙을 증명하는 도구로써 대수를 사용하는 것이 가능해짐

(2) 대수에 관한 관점

1. 대수의 절차적인 면(procedural aspect)
   - 수치를 얻기 위해, 수를 가지고 행하는 산술적 연산
2. 대수의 구조적인 면(structural aspect)
   - 대수식 자체에 대해 행해지는 여러 연산

(3) 형식불역의 원리(피콕)

1. '산술대수' 법칙이 '기호대수'로 확장되는 것
   - 산술대수(Arithematic algebra)를 일상적인 양의 수를 나타내는 기호와 덧셈, 뺄셈 같은 연산 기호를 사용해서 얻어지는 학문으로 간주했다.
   - 기호대수(symbolic algebra)는 기호 연산이 산술과 유사한 연산에서 유도되었다 하더라도 연산의 적용 범위에 제한을 두지 않는다.

(4) 대수적 원리에 따른 지수법칙의 확장

1. 대수적 원리(프로이덴탈)
   - 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 연산, 관계를 확장하듯이, 기본적인 성질이 유지되도록 대수적인 구조를 확장하는 '형식불역의 원리'
2. 지수를 자연수에서 정수로 확장
   - 기존의 체계가 가지고 있는 $a^m a^n = a^{m+n}$이라는 기본적인 성질이 유지되도록 한다.
   - $a \neq 0$이고 $m=0$일 때, $a^0 a^n = a^{0+n}$이므로 $a^0 = 1$이 성립한다.
   - $a \neq 0$이고 $m=-n$일 때, $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이므로 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$이 성립한다.
3. 지수를 정수에서 유리수로 확장
   - 기존의 체계가 가지고 있는 $(a^m)^n = a^{mn}$이라는 기존적인 성질이 유지되도록 한다.
   - $a>0$일 때, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$이므로 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$이 성립한다.

(5) 변수 개념의 본질

1. 변수의 동적인 측면: 변하는 대상(Variable Object)
   - 실제로 변하거나 변하는 것으로 가정되는 대상
2. 변수의 정적인 측면: 다가이름(Polyvalent name)
   - 수학적으로 동치인 임의의 대상
   - 여러 상황의 '동시 고려' 필요성에서 발생
   - 수학의 특징인 패턴의 일반화와 관련

(6) 변수 개념의 다면성

1. 자리지기(미지수): $4x+3=23$에서의 x와 같이 방정식의 해를 나타냄
2. 문자: $a+b=b+a$에서의 a, b와 같이 일반화의 표현을 위해 사용됨
3. 기호: 양, 수, 점, 집합, 명제 등 임의의 대상을 나타냄
4. 부정소(임의의 상수): $y=kx$에서 k와 같이 아직 정해지지 않은 상수를 나타냄
5. 함수식에서의 독립변수·종속변수·매개변수, 연산변수, 관계변수 등

(7) 대수 학습 구분(유시스킨)과 변수의 의미

1. 문제해결 과정의 학습: 방정식의 풀이
   - 자리지기로서의 미지수
2. 산술의 일반화 학습: 기호를 사용한 일반화
   - 다가이름으로서의 부정소
3. 양 사이의 관계 학습: 기호에 의한 양의 탐구
   - 독립변수, 종속변수, 매개변수
4. 구조의 학습: 구조에 대한 연구
   - 임의의 대상, 임의의 기호(형식적 조작의 대상)

(8) 변수 개념과 인지장애

1. 학생들은 변수 기호를 임의로 선택할 수 있다는 것을 잘 이해하지 못한다.
2. 학생들은 변수가 나타내는 대상을 제한하여 생각하는 경향이 있다.(특히 '수'로 제한함)
3. 학생들은 변수를 포함한 대수식을 완결되지 않은 식으로 인식하기도 한다.
4. 학생들은 변수는 특정한 대상을 대신하는 것으로 이해한다.(복수가 아닌 단일한 대상)
5. 학생들은 독립변수, 종속변수 개념을 불완전하게 이해하고 있다.

(9) 문자와 수, 문자와 일상 언어의 공통점(지도서)

1. 수 또는 문자를 사용한 식으로 관찰 결과를 나타내고 계산할 수 있다.
2. 문자와 일상 언어는 어떤 대상이나 상황을 표현하는 방식이다.

(10) 문자와 수, 문자와 일상 언어의 차이점

1. 동시 표현의 성질
   - 문자와 '수'와의 차이는 수는 단일한 하나의 수를 표현하지만 문자는 동시에(그러나 개별적으로) 많은 수를 표현할 수 있다는 것이다.
2. 한계 결정의 자유성
   - 문자와 '일상언어'와의 차이는 일상언어에서는 명시적으로 또는 암묵적으로 처음부터 저절로 부과된 의미가 있기 마련이지만 문자는 고정된 의미의 집합에 연결되어 있지 않다는 것이다.
3. 문자 선택의 자유성
   - 문자와 '일상언어'와의 차이는 일상적인 언어는 표현이 변화하면 그 표현이 지칭하는 대상의 변화가 거의 항상 일어나게 되지만, 수학 언어는 주어진 대상을 지칭하기 위해서 거의 아무거나 임의로 문자를 선택할 자유가 있다는 것이다.

(11) 방정식 풀이에서의 분석과 종합

1. 분석의 과정
   - 문제 상황으로부터 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 찾아 그 관계를 식으로 나타낸 후, 이 식이 풀렸다(성립한다)고 가정하고 등식의 성질을 이용하여 방정식을 변형하면서 방정식이 참이 되기 위한 필요조건을 찾는 것
2. 종합의 과정
   - 방정식이 참이 되기 위한 필요조건으로 발견한 해가 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아보면서, 궁극적으로 필요충분조건이 되는 해를 찾아나가는 것

Ⅲ. 함수

(1) 함수의 역사적 발달

1. 전 함수 단계
   - 이 당시에는 함수가 무엇인지에 대한 논의는 없었다.
2. 기하적 함수 단계(17세기)
   - 함수가 수학적으로 의식화되어 사용되고 정의되며 발달하기 시작하였다.
   - 이 단계의 함수 개념은 여러 가지 운동을 양적으로 수학화하려는 것에서 발생하였다.
3. 대수적 함수 단계(18세기)
   - 함수를 대수적으로 연구하는 관점의 변화는 비에타의 문자 대수와 방정식론, 데카르트의 해석기하학을 기초로 18세기에 본격적으로 이루어졌다.
4. 논리적 함수 단계(19세기)
   - 함수 개념이 더 이상 대수식에 관련된 것이 아니라, 다만 두 변수가 대응이라는 논리적 조건에만 관련되어 있다는 의미이다.
   - 일가성: 정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 대응된다는 조건으로 함수와 함수가 아닌 것을 구분하는 기준이 된다.
   - 임의성: 함수는 어떤 특별한 표현에 의해 기술되거나 또는 어떤 규칙성을 따르거나 또는 어떤 특별한 형태를 가진 그래프에 의해 묘사될 필요가 없다는 것을 의미한다.
5. 집합적 함수 단계(20세기)
   - 좀 더 엄밀한 의미의 공리론적 집합론을 기초로 함수를 정의하는 것을 의미한다.

(2) 함수의 여러 측면(핵심적인 내용)

1. 과정
   - 컴퓨터 프로그램이 자료를 처리하듯이 함수를 입력, 변환, 출력의 처리 과정으로 보는 것
2. 대상
   - 함수 자체를 하나의 실체로 파악하는 것

(3) 교수학적 현상학에 따른 함수의 지도(프로이덴탈)

1. 처음에는 다양한 현상에 대한 직관적 경험을 제공함
2. 학생들에게 그러한 현상에서 나타나는 종속성의 특성을 인식하게 함
   - 증가와 감소, 비례적인 변화, 주기적인 변화, 지수적인 변화, 대응적인 관계 등
3. 이를 좀 더 구체적이고 분석적으로 다루기 위해 표, 그래프, 식 등과 연결하여 특성을 더 명확히 함
4. 이를 바탕으로 구체적인 함수 이름 등을 알게 함
   - 정비례와 반비례, 일차함수, 이차함수, 삼각함수, 지수함수, 임의의 대응 등

(4) 초점에 따른 분류(프로이덴탈)

1. 점별 접근
   - 그래프를 해석할 때 한 점에만 초점을 맞추는 것
2. 국소적 접근
   - 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 보는 것
3. 전체적 접근
   - 어떤 구간이나 전체 구간에 걸쳐 그래프를 해석하는 것

(5) 함수 그래프 지도(크라벤담)

1. 양적 접근
   - 정확한 수치적 자료를 이용해서 좌표평면이나 좌표공간에 이를 정확하게 그림으로써 변화의 특징을 설명하고 예측하는 것을 의미한다.
2. 질적 접근
   - 어떤 상황을 수량화되지 않은 상태로 개략적으로 표현하고 설명하는 것을 의미한다.

(6) 함수 학습의 인식론적 장애

1. 학생들은 변화 현상을 관찰하면서 변하는 대상이 무엇인지, 그 대상을 변하게 하는 것이 무엇인지 명확히 파악하지 못하는 경향이 있다.
2. 학생들은 함수의 정의에서 독립변수와 종속변수의 비대칭성을 잘 인식하지 못한다.
3. 학생들은 함숫값은 독립변수에 따라서 변화되어야 한다는 선입관을 가지고 있다.
4. 학생들은 함수를 체계적인 규칙이나 대수식으로 보는 경향이 강하며, 종속변수의 값을 구하기 위해 독립변수에 실행된 조작이라고 생각하는 경향이 있다.
5. 학생들은 함수는 모든 정의역에서 한 가지 규칙이나 대수식으로 표현되어야 한다고 생각하는 경향이 있다.
6. 학생들은 함수를 함수의 다양한 표현, 즉 표, 대수식, 곡선으로서의 그래프 등과 동일시하는 경향이 있다.
7. 학생들은 함수에서 중요한 변수 개념을 이해하는 데 어려움이 있다.
8. 학생들은 함수의 정의에서 나타나는 일가성, 일대일 함수, 일대일 대응의 의미를 혼동하기가 쉽다.

Ⅳ. 기하와 증명

(1) 유클리드 「원론」 제5공준(평행선 공준)

한 직선이 두 직선과 만날 때, 같은 쪽에 있는 내각의 합이 두 직각보다 작으면 이 두 직선은 무한히 연장될 때 그쪽에서 만난다.

(2) 공리적 방법

인간이 직관적으로 자명하게 참으로 인정하는 사실을 공리와 공준으로 상정한 다음, 공리와 공준으로부터 다른 모든 수학적 명제를 이끌어내는 방법

(3) 연역적 추론(공리적 방법을 포함)

정의, 공리, 공준, 이미 참이라고 알려진 성질을 이용하여 새로운 참인 명제를 이끌어내는 것

(4) 유클리드 「원론」의 수학교육적 한계

1. 비형식적 추론이라고 할 수 있는 귀납적 추론, 유비추론을 통한 발견 과정은 유클리드 「원론」에는 나타나 있지 않다.
2. 유클리드 「원론」의 종합적 방식은, 유클리드가 「원론」을 저술하는 과정에서 경험하였을 무수한 수학적 추론 과정을 보여주지 못한다.

(5) 해석 기하와 종합 기하

1. 해석 기하(데카르트가 창안한 기하학)
   - 직선이나 원 위에 있는 점의 좌표 (x, y)에서 x와 y 사이에 성립하는 방정식의 관점에서 도형을 연구
2. 종합 기하(유클리드 「원론」의 기하학)
   - 직선, 원 등의 도형을 전체적이고 종합적으로 파악

(6) 기하 개념 체계를 형성하는 방식

1. 수직적 관련성으로 연결된 개념들은 서로 종속적인 관계를 맺는다.
   - 개념들 간의 위계 구조, 즉 개념들 간의 계통성을 일컫는다.
2. 수평적 관련성으로 연결된 개념들은 독립적이면서도 상호보완적인 관계를 맺는다.
   - 어떤 대상이나 현상을 여러 개념을 통해 동시에 파악하는 것을 의미한다.

(7) 기하 개념의 이해와 적용에서의 장애

1. 개념의 개별화
   - 학생들이 각각의 개념을 분리된 것으로 파악한다는 것
   - 교수 방법: 이미 확립되어 있는 하위 개념에 근거해서 새로운 개념을 도입하고 설명해야 한다.
2. 개념의 고착화
   - 학생들이 개념을 특정 맥락에만 고착시키는 것
   - 교수 방법: 딘즈의 '수학적 다양성의 원리'에 따라 비본질적인 성질의 다양한 변형을 제시함으로 비본질적인 성질과 본질적인 성질을 비교할 수 있도록 해야 한다.
3. 선행 개념의 방해
   - 어떤 대상에서 두드러지는 개념은 그 대상을 다른 개념으로 해석하는 것을 방해하기도 한다.
   - 중복 장애(Duval): 기하 문제를 해결할 때, 변, 각, 꼭짓점 등 똑같은 요소를 두 번 이상 존재하는 것처럼 고려해야 할 때 곤란을 겪는 현상을 말한다.

(8) 기하 영역에서의 수학화(프로이덴탈)

1. 주변 현상을 도형이라는 본질로 조직
2. 도형의 성질 발견
3. 국소적 조직화: 정의하기와 증명하기
4. 전체적 조직화: 공리화
5. 존재론적 결합 끊기

(9) 국소적 조직화(프로이덴탈)

공리에서 출발하는 것이 아니라 학습자가 접하고 있는 영역에서 참이라고 인정되는 사실, 즉 학습자의 실제로부터 시작해서 부분적으로 조직화하는 것

(10) 국소적 조직화의 과정(프로이덴탈)

1. 정의하기
   - 여러 성질들 중에서 어느 하나를 다른 것들을 이끌어 내는 기본 성질로 설정할 수 있다.
2. 증명하기
   - 그 성질들을 증명을 통해 국소적으로 조직화함으로써 학생들 스스로 명제를 만드는 경험을 할 수 있다.

(11) 상대주의 수리철학적 관점에서 본 증명의 의미

1. 준경험주의(발견의 수단, 분석적 측면이 부각됨)
   - 증명은 어떤 정리를 정당화하는 수단이 아니라, 증명 분석을 통해 추측을 개선해 나가고 증명 자체를 반박함으로써 새로운 개념을 발견해내는 발견의 수단이다.
2. 사회적 구성주의(확신과 설명의 수단)
   - 증명을 통해 학생들에게 수학 명제가 의미하는 바에 대한 통찰을 제공함으로써 명제를 이해하고 확신하도록 지도해야 함을 시사한다.

(12) 증명의 두 가지 의미(라카토스)

1. 증명의 본질은 사고 실험
   - 증명은 곧 사고 실험이라는 관점은, 사고 실험을 통한 증명의 재검토 과정에서 반례에 의해 증명과 추측을 반박하고 개선함으로써 새로운 개념을 발견할 수 있음을 시사한다.
2. 증명 절차는 추측을 부분 추측으로 분해하여 그것을 이미 알고 있는 것과 연결시키는 과정
   - 분석적 방식으로서의 증명을 강조한 것

(13) 증명에 대한 관점(칸트)(수학 학습-지도 원리와 방법)

증명은 전형적인 특정한 도형의 구성에서 시작하는 일련의 선험적 직관에 의한 구성으로 명시적으로 보편적으로 타당한 결론에 도달하는 과정

⑭ 역사 발생적 원리에 따른 증명 지도(브랜포드)

1. 실험적 증명(삼각형의 내각의 크기의 합)
   - 세 각을 측정해 측정값을 표로 만들어 보게 하고 세 각의 합이 180° 임을 발견하도록 한다.
2. 직관적 증명
   - 직사각형의 내각의 합은 4직각이고 직사각형은 2개의 합동인 직각삼각형으로 분할된다.
   - 직각삼각형의 세 각의 합은 정확히 2직각과 같으므로 직각삼각형의 두 예각의 크기의 합은 직각이다.
   - 임의의 삼각형은 두 직각삼각형으로 나누어진다. 따라서 위의 사실을 이용하여 그 내각의 합이 2직각임을 보일 수 있다.
3. 수학적 증명
   - 전제로부터 결론을 연역하는 형식적 증명 단계가 제시된다.

⑮ 수학적 귀납법의 의미

관찰과 귀납, 추측에 의해 발견된 자연수와 관련된 법칙이 일반적으로 모든 자연수에 대한 참임을 수학적으로 증명하는 방법

> ○ 수학적 귀납법
>
> 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
>
> (ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(16) 증명 교수·학습 개선 방향(핵심적인 내용)

1. 분석적 방식과 종합적 방식의 통합
   - 결론이 성립하기 위한 전제 조건을 탐색하는 분석적 방식을 통해 증명 방법을 찾고, 종합적 방식을 통해 증명 과정을 정리할 수 있도록 증명을 지도
2. 발견의 맥락과 정당화의 맥락의 통합
   - 학생에게 가정만을 제시하여 가정으로부터 성립될 수 있는 여러 가지 결론을 스스로 추측하게 하는 발견의 맥락과, 학생 자신의 추측이 옳은지 틀린지를 조사하는 정당화의 맥락을 통합하여 지도
3. 조직화 수단으로서의 증명의 도입
   - '정의'가 아닌 '정의하기'와 '증명'이 아닌 '증명하기'를 학생들이 경험할 수 있도록 지도

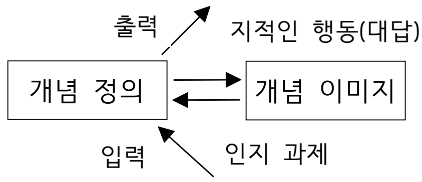
Ⅴ. 미분과 적분

(1) 개념 정의와 개념 이미지

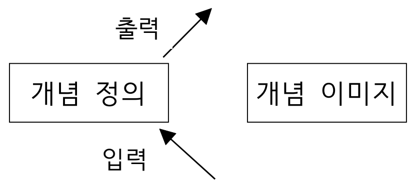
1. 개념 정의(concept definition)
   - 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의
2. 개념 이미지(concept image)
   - 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조

(2) 개념 정의와 개념 이미지가 상호작용하는 방식(비너)

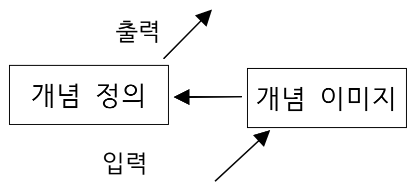
1. 정의와 이미지의 상호작용(신론3)
   - 수학 개념의 개념 이미지와 개념 정의가 완전히 이해되어 둘 사이의 상호작용이 이루어지는 경우



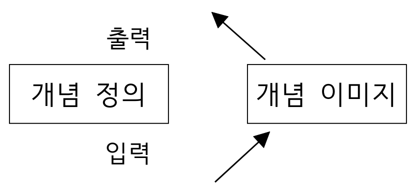
2. 완전 형식적 연역(신론3)
   - 수학 개념의 정의만을 기억하여 형식적으로 이해하는 경우



3. 직관적 사고를 따른 연역(신론3)
   - 개념 이미지를 먼저 떠올리고 그에 대한 정의를 통해 개념을 이해하는 경우



4. 직관적 반응(신론3)
   - 학생들이 스스로 구성한 개념 이미지만을 이용해 개념을 이해하는 경우



(3) APOS(행동-과정-대상-스키마) 이론(두빈스키)

1. 어떤 개념을 익히기 위해서는 우선 대상에 대한 변환을 적용해 보게 되는데, 이러한 낱낱의 변환을 '행동'이라고 한다.
2. 대상에 대한 행동을 반복하면서 반성하는 가운데 그 행동이 내면화되어 하나의 정신적인 '과정'이 된다.
3. 과정을 전체적으로 인식하기 시작하면서 과정은 대상화되어 하나의 '대상'이 된다.
4. 행동, 과정, 대상이 조직화되고 연결됨으로써 하나의 일관성 있는 구조가 되면 '스키마'가 된다.

(4) 역사 발생적 원리를 따른 미적분 지도의 어려움

1. 적분의 경우 일반적인 방법이 존재하는 미분과 달리 함수식의 형태에 따라 적분 방법이 달라지기 때문에 미분에 비해 전반적인 난이도가 높다.
2. 미분의 역과정으로 적분을 도입하지 않을 경우 구분구적법으로 적분을 구해야 하는데, 이 과정은 상당히 복잡하고 번거롭다.

Ⅵ. 확률과 통계

① 수학적 확률과 통계적 확률

1. 수학적 확률(고전적 정의)(라플라스)
   - 어떤 사건 A가 일어날 확률 $P(A)$는 '시행에서 가능한 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비'와 같다고 정의
   - 여기서는 표본공간을 이루는 모든 각 결과가 일어날 가능성이 같다는 것, 곧 동확률성을 암묵적으로 가정
2. 통계적 확률(빈도적 관점)
   - 어떤 사건의 확률을 무한번의 또는 충분히 많은 횟수의 반복시행을 하여 그 사건이 발생하는 상대도수의 극한값으로 정의

② 통계적 확률로 확률을 정의할 때의 문제점

1. 상대도수의 극한이 존재한다는 것을 직관적으로는 이해할 수 있지만, 이론적으로 보장할 수 없다는 점
   - 통계적 확률은 실험을 통한 확률이므로 무한히 시행할 수 없다.
2. 확률을 추정하기 위한 일련의 특정한 사건의 선택을 정당화하는 절차가 요구된다는 점
   - 통계적으로는 동전을 던져 앞면이 나오는 확률을 0.5로 확정지을만한 근거가 없으므로 0.499나 0.501으로 정할 수도 있다. 그러므로 동전을 던져 앞면이 나오는 확률로 0.5을 선택하는 것에 대해 정당화하는 절차가 요구된다.
3. 무작위성을 전제로 한 시행은 확률관념을 전제로 하는 것이므로 이는 순환적 정의라는 문제점을 내포한다.
   - 무작위성인지를 판단하기 위해서는 수학적 확률과 비교해보는 수밖에 없다.

(3) 확률적 사고와 확률 직관(피시바인)

1. 일차 직관과 이차 직관(학교수학의 교육적 기초)
   - 일상 경험으로부터 구성된 주관적이며 불안정한 일차적 확률 직관이 존재한다.
   - 지도를 통해 이차적 확률 직관을 확립할 필요가 있다.
2. 피시바인의 주장
   - 확률 개념을 이해하기 위해서는 확률에 대한 자연스러운 직관을 거부하는 태도가 필요하다.
   - 인간의 행동 자체가 확률적이므로, 확률 교육에서는 인간의 행동을 탐구하는 것에 강조점을 두어야 한다.
3. 올바른 확률 교육
   - 확률 교육을 통해서는 무엇보다 귀납적 사고의 가치와 역할을 가르쳐야 한다.
   - 이미 발달시킨 직관의 한계를 이해하고 수정하여 균형을 추구하는 것이 중요하다.

(4) 판단 전략과 확률 교육

1. 대표성 전략(카네만 외 2명의 연구)
   - 표본이 크기에 관계없이 모집단과 유사할 것을 기대하거나, 표본을 추출하는 과정이 무작위성을 반영하기를 기대하는 것을 가리킨다.
2. 정보의 이용가능성 전략(카네만 외 2명의 연구)
   - 판단을 내릴 때 개인적으로 이용할 수 있는 정보에 영향을 받는 것을 가리킨다.
3. 조정과 고정 전략(카네만 외 2명의 연구)
   - 초기값을 정한 후 그 값을 조정하여 최종적인 답을 얻게 되면서, 초기값을 어떻게 정했는가에 따라 상당히 다른 결과에 도달하는 현상을 가리킨다.

4. 결과 중심 판단 전략(코놀드의 연구)
  • 많은 사람들이 특정한 결과가 실제로 일어날 것인가 여부를 결정하는 것, 곧 결과가 어떻게 될 것인가를 판단하여 결정하는 경향이 있다.
5. 인과적 정보에 주목하여 판단하는 전략(코놀드의 연구)
  • 도수에 관한 정보보다는 인과적 정보에 주목하여 판단하는 현상

(5) 확률적 사고의 네 가지 수준(샤우네시)

1. 비확률적 사고 수준
  • 아동은 수학적인 판단이 아니라 신념에 근거하여 판단하거나 또는 단일한 결과만을 예측하고 확인한다.
2. 원시 확률적 사고 수준
  • 대표성, 이용 가능성 등의 판단 전략을 초보적이고 직관적으로 사용하는 수준
3. 발생 단계의 확률적 사고 수준
  • 간단한 문제 상황에 수학적 확률 또는 통계적 확률 개념을 적용하는 단계
4. 실제적인 확률적 사고 수준
  • 우연에 대한 여러 수학적인 관점, 곧 통계적 확률과 수학적 확률 등의 의미를 이해하며, 이들 사이의 차이점을 알고 적절하게 적용하는 능력을 가지는 단계

(6) 표본 공간 개념의 발달 수준

수준	각 수준별 판단 준거
주관적 사고	• 단일 사건의 모든 경우를 불완전하게 나열함
이행기	• 단일 사건의 모든 경우를 나열함 • 제한적이거나 체계적이지 않은 전략을 사용하여 복합 사건의 모든 경우를 나열함
비형식적 양적 사고	• 전략을 일부 활용하여 복합 사건의 모든 경우를 나열함
수치적 사고	• 전략을 활용하여 둘 또는 세 사건으로 이루어진 복합 사건의 모든 경우를 나열함

(7) 통계적 사고

1. 통계적 사고는 자료의 변이성(variation)이 우리 주변에 그리고 우리가 행동하는 모든 것에 존재하고 있음을 인식하는 사고 과정
2. 자료의 변이성 속에서 규칙성을 찾는 것이 바로 통계적 사고 과정

(8) 탐구 상황에서의 통계적 사고(와일드&팬쿡)

1. 문제 단계
  • 체계적으로 정보를 확인하여 문제로 형식화하게 된다.
2. 계획 단계
  • 측정 방법을 결정하고, 표본 추출 방법을 선택하며, 자료 관리 체계와 예비 조사 방법 그리고 결과를 분석하는 방법을 결정하게 된다.
3. 자료 단계
  • 필요한 자료를 수집하고, 관리하며, 정돈한다.
4. 분석 단계
  • 자료 검토, 계획했던 대로 하는 자료 분석, 계획하지 않았던 방식으로 하는 자료 분석, 그리고 이에 근거하여 가설을 생성한다.
5. 결론 단계
  • 결과 해석, 결론 도출, 새로운 아이디어 모색, 상호 의견 교환을 한다.

(9) 탐구 활동 과정에서 주로 활용하는 기본적인 통계적 사고(와일드&팬쿡)

1. 자료의 필요성 인식
  • 자료가 왜 필요한지를 인식하지 못하면 조사 활동 자체가 의미가 없고 결국 통계적 사고를 경험하지 못하게 된다.
2. 수량화
  • 수량화에 의하여 주어진 상황 속에 감추어진 수량적 정보를 적절히 드러내고 새로이 표현하지 못하면 자료를 궁극적으로 이해할 수 없다.
3. 자료의 변이성 탐구
  • 자료의 변이성을 탐구하지 못하면, 자료가 어떤 특성을 가지고 있는지 파악하지 못하고 적절한 예측을 할 수도 없게 되며 결국 탐구 활동이 불가능해진다.
4. 통계 모델에 따른 추론
5. 통계와 맥락의 통합
  • 낱낱의 자료가 아니라 자료 전체에 대한 통찰 그리고 그 통찰과 실세계 사이의 관계를 파악하고 통합하지 못하면, 통계가 실세계를 이해하는 중요한 도구가 된다는 것을 이해하지 못하며 궁극적으로는 통계를 활용하여 실세계 문제를 이해하거나 해결하지 못하게 된다.

(10) 탐색적 자료 분석(투키)

1. 저항성(resistance)
   - 일부 자료가 파손되어도 자료 전체에 대하여 비교적 합리적인 해석을 내릴 수 있다는 의미
   - 학교 수학에서는 평균값과 중앙값의 차이를 알고 상황에 따라 선택할 수 있다고 지도
2. 그래프를 통한 현시성(revelation)
   - 자료를 그래프로 나타냈을 때 그 그래프를 해석함으로써 다양한 의미를 도출할 수 있다는 것

(11) 확률과 통계 교육의 문제(프로이덴탈)

1. 현실과 단절된 추상 체계로 다룬다.
2. 수량적인 자료로 가득한 계산 패턴 체계로 다룬다.

(12) 통계 영역에서의 현실 맥락 및 수학사 활용(베커)

1. 역사적으로 평균 개념은 대부분 큰 수를 대략적으로 추정하기 위한 상황에서 활용되었다.
   - 기원후 4세기에 인도에서는 나무에 달린 나뭇잎과 과일 수를 알아보기 위하여 평균 크기의 가지를 선택하여 개수를 센 후 가지 수에 곱하였다고 한다.
   - 아테네인들이 적의 성벽 위로 올라가기 위하여 사다리를 만들 때, 성벽을 이루는 벽돌 하나의 두께와 평균적으로 사용된 벽돌의 개수를 계산하여 대략적으로 사다리의 길이를 계산하였다는 이야기도 있다.
2. 교육적 의의
   - 이 연구는 통계 영역에서 현실 맥락을 활용한다는 의미뿐만 아니라 수학사를 어떻게 활용할 수 있는지에 대해서도 시사점을 준다.

(13) 통계적 소양의 교육(갈)

1. 지식 요소
   - 기본 소양, 통계적 지식, 수학적 지식, 맥락적 지식, 비판적 질문
   - 기본 소양: 통계를 다루려면 기본적으로 정보, 그것도 언어로 표현된 정보를 다룰 수 있어야 한다.
2. 성향 요소
   - 신념과 태도, 비판적 자세
   - 비판적 자세: 통계와 더불어 주어지는 정보를 무조건 거부하거나 수용하지 않고 비판적으로 검토하는 태도를 가리킨다.

○ 비판적 질문의 예(핵심적인 내용)

(ⅰ) 표본은 모집단을 대표할 수 있는 사람이나 단체를 포함하고 있는가? 표본이 편중되어 있지는 않은가?

(ⅱ) 수집한 자료에 적합한 통계값을 제시하였는가? 예를 들면, 서열형 자료로 평균을 구한 것은 적절한가? 주어진 대푯값으로 최빈값이 적절한가?

(ⅲ) 그래프를 적절하게 그렸는가? 자료의 주요 경향을 왜곡하지는 않았는가?

(ⅳ) 상관관계를 인과관계와 혼동하고 있지는 않은가?

(14) 수학 수업의 담론 구분(스파드)

1. 대상수준
   - 구체적인 수학적 대상들에 직접적으로 관여하는 수준
2. 메타수준
   - 대상수준보다 상위에 있는 것으로, 수학적 대상들을 파악하고 조절하는 포괄적인 활동에 관련되는 수준
3. 메타수준의 학습은 대상수준의 학습을 반성하도록 촉진함으로써 이루어진다.

(15) 대푯값 관련 교과서 과제의 변형(왓슨&메이슨)

1. 과제 변형의 예
   - 7개의 수로 이루어졌고 최빈값 5, 중앙값 6, 평균은 7인 자료집합을 제시하여라.
2. 과제 변형의 유익
   - 다양한 자료집합이 생성될 수 있어서 학생들 나름대로 전략을 개발할 수도 있다.
   - 여러 종류의 자료집합을 비교하면서 활발하게 토론할 수도 있다.
   - 학생들에게 친숙한 맥락을 설정하여 과제를 제시하면 학생들의 배경화, 개인화, 탈배경화, 탈개인화를 촉진하는 수업을 이끌 수 있다.
   - 가역적 사고를 촉진한다.
   - 메타수준의 학습을 유도하여 탈배경화와 탈개인화를 촉진하는 효과도 있다.

◎ 교수·학습 방법 (핵심적인 내용)

(가) 수학 교과 역량 함양을 통해 수학을 깊이 있게 학습하고 적용할 기회를 제공한다.

① 다음과 같은 교수·학습 방법을 통해 문제해결 역량을 함양하게 한다.

㉠ 수학의 개념, 원리, 법칙을 이용하여 해결 가능한 문제를 학생에게 제시한다. 이때 다양한 방법으로 해결 가능한 문제, 여러 가지 해답이 나올 수 있는 문제 등을 활용할 수 있다.

㉡ 문제에 주어진 조건과 정보를 분석하고 적절한 문제해결 계획을 수립하고 실행하며 문제해결 과정을 반성하도록 구체적인 발문과 권고를 제시한다.

㉢ 문제해결 과정 및 결과의 의미를 재해석하여 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하게 한다.

㉣ 성공적인 문제해결 경험을 바탕으로 적극적이고 자신감 있게 문제해결에 참여하게 하고, 단번에 답이 나오지 않는 문제라도 끈기 있게 도전하여 성취감을 느끼게 한다.

② 다음과 같은 교수·학습 방법을 통해 추론 역량을 함양하게 한다.

㉠ 관찰, 실험, 측정 등 구체적 조작 활동을 통해 수학의 개념, 원리, 법칙에 흥미와 관심을 갖고 다양한 방법으로 탐구하고 이해하게 한다.

㉡ 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.

㉢ 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적이고 체계적으로 수행하고 반성하게 한다.

③ 다음과 같은 교수·학습 방법을 통해 의사소통 역량을 함양하게 한다.

㉠ 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 정확하게 사용하고 표현끼리 변환하게 한다.

㉡ 학생이 자신의 사고와 전략을 수학적 표현으로 나타내고 설명하면서 수학적 표현의 편리함을 인식하게 한다.

㉢ 학생 간 상호 작용과 질문이 활발한 교실 문화를 조성하고 수학적으로 의미 있는 의사소통이 이루어지도록 적절한 과제를 제시하고 안내한다.

㉣ 수학적 아이디어에 대해 상호 작용하는 과정에서 타인을 배려하고 의견을 존중하는 태도를 기르게 한다.

④ 다음과 같은 교수·학습 방법을 통해 연결 역량을 함양하게 한다.

㉠ 영역이나 학년(군) 내용 간에 관련된 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 유기적으로 연계하여 새로운 지식을 생성하면서 창의성을 기르게 한다.

㉡ 수학과 실생활, 사회 및 자연 현상, 타 교과의 내용을 연계하는 과제를 활용하여 수학의 유용성을 인식하게 한다.

⑤ 다음과 같은 교수·학습 방법을 통해 정보처리 역량을 함양하게 한다.

㉠ 실생활 및 수학적 문제 상황에서 자료를 탐색하고 수집하며 수학적으로 처리하여 합리적인 의사 결정을 하는 태도를 기르게 한다.

㉡ 교구나 공학 도구를 활용하여 추상적인 수학 내용을 시각화하고 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적 이해와 논리적 사고를 돕는다.

㉢ 학생이 주도적으로 교구나 공학 도구를 활용하여 탐구하게 한다.

㉣ 계산 기능 함양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서는 복잡한 계산을 할 때 공학 도구를 이용할 수 있게 한다.

(다) 수학과의 수업은 학습 내용, 학생의 학습 능력과 수준 등을 고려하여 다음의 교수·학습 방안을 적절히 선택하여 적용한다.

① 설명식 교수는 교사가 설명과 시연을 통해 수업을 주도하는 교수·학습 방안으로, 수업 내용을 구조화하여 체계적으로 지도하는 데 효과적이다. 이때, 교사는 학생의 적극적인 수업 참여를 유도하고, 사고를 촉진하는 발문을 적절히 활용한다.

② 토의·토론 학습은 특정 주제에 대해 협의하거나 논의하는 교수·학습 방안으로, 학생들이 수학 내용을 폭넓게 이해하고 자신의 주장을 효과적으로 표현하고 다른 사람의 의견을 비판적 사고를 통해 수용하여 합리적으로 의사 결정하는 태도를 기를 수 있게 한다.

③ 협력 학습은 모둠 내의 상호 작용, 의사소통, 참여를 통해 공동의 학습 목표에 도달하도록 하는 교수·학습 방안으로, 다른 사람을 존중하고 배려하며 모둠 내의 역할을 수행하고 책임감을 기를 수 있게 한다.

④ 탐구 학습은 학생이 중심이 되어 수학의 개념, 원리, 법칙을 발견하고 구성하는 교수·학습 방안으로, 학생 스스로 자료와 정보로부터 지식을 도출하거나 지식의 타당성을 확인하는 것이 중요함을 알게 할 수 있다.

⑤ 프로젝트 학습은 학생 스스로 특정 주제나 과제를 탐구하고 해결하기 위해 계획을 수립하고 수행하여 결과물을 산출하고 공유하는 교수·학습 방안으로, 자기주도적으로 수학 지식과 경험을 통합하게 할 수 있다.

⑥ 수학적 모델링은 학생의 삶과 연계된 현상을 다양한 수학적 표현 방식을 이용하여 수학적 모델로 만들고 수학적 모델을 다시 실생활이나 사회 및 자연 현상에 적용하는 교수·학습 방안으로, 수학의 응용에 대한 넓은 안목을 갖게 할 수 있다.

⑦ 놀이 및 게임 학습은 호기심과 흥미를 유발하는 놀이 및 게임 활동을 활용하는 교수·학습 방안으로, 활동 속에서 수학 개념이나 원리를 탐구하고 동료와 경쟁 또는 협력하면서 자연스럽게 수학에 접근하고 수학 학습에 대한 자신감 및 의사소통 역량을 기르게 할 수 있다.

◎ 평가 (핵심적인 내용)

(1) 평가의 방향(핵심적인 내용)

(가) 학생의 수학 학습에 대한 정보를 수집·활용하여 학생의 주도적 학습과 성장을 지원하고 교사의 수업 개선을 돕도록 지속적으로 평가를 실시한다.

(2) 평가 방법

(다) 학생의 수학 학습 과정과 결과는 다양한 평가 방안을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

① 지필평가는 수학 내용 체계의 지식·이해, 과정·기능을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서·논술형 등의 다양한 문항 유형을 사용할 수 있다.

② 프로젝트 평가는 학생 스스로 특정 주제나 과제를 탐구하고 해결하기 위해 계획을 수립하고 수행하는 과정과 그 결과물을 평가하는 방안으로, 수학 내용 체계의 세 범주를 종합적으로 평가할 때 활용할 수 있다.

③ 포트폴리오 평가는 학생의 성장에 대한 정보를 얻기 위해 수학 학습 수행과 그 결과물을 일정 기간 수집하여 평가하는 방안으로, 수학 교과 역량의 발달을 종합적으로 평가할 때 활용할 수 있다.

④ 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 질의응답, 학생의 발표를 통해 평가하는 방안으로, 학생의 사고 방법, 수행 과정, 수학 내용 체계의 가치·태도 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑤ 자기 평가는 학생 스스로 자신의 학습 과정과 결과를 평가하는 방안으로, 수학 내용의 이해와 수행 과정, 문제해결과 추론 과정의 반성, 자신의 생각 표현, 수학 내용 체계의 가치·태도 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑥ 동료 평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방안으로, 협력 학습 상황에서 학생 개개인의 역할 수행이나 집단 활동의 기여를 평가할 때 활용할 수 있다.

◎ 성취기준 해설, 성취기준 적용 시 고려 사항

Ⅰ. 중학교 1～3학년 수학

(1) 수와 연산

(가) 성취기준 해설

① [9수01-02] 초등학교에서 학습한 최대공약수와 최소공배수의 개념을 바탕으로 소인수분해를 이용하여 최대공약수와 최소공배수를 구하게 한다. 최대공약수와 최소공배수는 자연수의 소인수분해를 이용하는 범위에서 다루고, 최대공약수와 최소공배수의 활용 문제는 다루지 않는다.

② [9수01-05] 정수의 사칙계산의 원리는 여러 가지 모델을 이용하여 직관적으로 이해하게 하고, 실생활에서 사칙계산의 유용성을 인식하게 한다.

③ [9수01-06] 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 다룬다. 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.

④ [9수01-08] 실생활에서 사용되는 무리수의 예를 찾아보는 활동을 통해 무리수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다. 실수는 유리수와 무리수로 이루어짐을 이해하게 하고, 수 체계의 논리적인 아름다움에 관심을 갖게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이용하는 문제를 해결하기 위해 더 나은 계산 방법을 끈기 있게 찾아보게 하고, 풀이 과정과 결과를 반성하는 태도를 갖게 한다.

② 제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다.

③ 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 무리수의 존재를 직관적으로 이해하게 한다.

④ 제곱근의 값은 계산기 등을 이용하여 구할 수 있음을 알게 한다.

⑤ 정수, 유리수와 관련하여 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.

⑥ 사칙계산 이외의 이항연산 문제는 다루지 않는다.

(2) 변화와 관계

(가) 성취기준 해설

① [9수02-05] 실생활에서 좌표가 사용되는 예를 찾아보고 이를 수직선과 좌표평면 위에 표현해 보며, 그 유용성과 편리함을 인식하게 한다.

② [9수02-06] 다양한 상황을 그래프로 나타내어 증가와 감소, 주기적 변화 등 변화 상태를 쉽게 파악할 수 있게 한다. 주어진 그래프를 해석하여 그래프가 나타내는 상황을 설명하게 함으로써 그래프의 유용성을 인식하게 한다.

③ [9수02-07] 속력과 거리, 속력과 시간과 같은 실생활의 예를 통해 정비례와 반비례 관계를 직관적으로 이해하게 하고, 정비례와 반비례 관계가 성립하는 실생활의 예를 찾아 설명하게 한다.

④ [9수02-08] 지수법칙은 지수가 자연수인 범위에서 단항식의 곱셈과 나눗셈을 하는 데 필요한 정도로 다룬다.

⑤ [9수02-10] 다항식의 나눗셈에서는 다항식을 단항식으로 나누어 그 몫이 다항식이 되는 경우만 다룬다.

⑥ [9수02-19] 다항식의 곱셈과 다항식의 인수분해의 역관계를 이해하고, 이와 유사한 관계를 찾아보는 활동을 하게 한다. 다항식의 곱셈과 인수분해는 다음의 경우를 다룬다.

$m(a+b)=ma+mb$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑦ [9수02-22] <u>이차함수 $y=f(x)$에서 최댓값과 최솟값은 x의 범위가 실수 전체인 경우만 다룬다.</u>

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 문자와 수, 문자와 일상 언어의 공통점과 차이점에 대한 탐색을 통해 문자의 특징을 이해하고, 자신의 삶 속에서 문자의 유용성을 인식하게 한다.

② 수에 대한 사칙연산과 소인수분해가 다항식으로 확장될 수 있음을 인식하게 한다.

③ 방정식과 부등식, 함수는 다양한 상황을 통해 도입하고, 그 필요성을 인식하게 한다.

④ 방정식과 부등식은 여러 가지 방법으로 풀어 보면서 더 나은 풀이 방법으로 해를 찾게 한다. 구한 해가 문제 상황에 적합한지 확인하는 과정을 통해 타당한 근거에 따라 자신의 의견을 논리적으로 설명하는 태도를 갖게 한다.
⑤ 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타내고 이들 사이의 상호 변환 활동을 하게 한다.
⑥ 함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다.
⑦ 다양한 상황을 이용하여 일차함수와 이차함수의 의미를 다룬다.
⑧ 공학 도구를 이용하여 함수의 그래프를 그리거나 함수의 그래프의 성질을 탐구하게 한다.
⑨ 이차방정식은 해가 실수인 경우만 다룬다.
⑩ 이차방정식의 근과 계수와의 관계는 다루지 않는다.
⑪ 실생활이나 사회 및 자연 현상과 관련된 문제를 해결할 때 수학적 모델링을 적용하고 도전적으로 문제를 해결할 수 있게 한다. 이때, 환경 및 기후변화 등과 관련된 다양한 문제 상황을 통해 생태전환에 관심을 갖게 한다.
⑫ 방정식, 부등식, 함수에 대한 지나치게 복잡한 활용 문제는 다루지 않는다.
⑬ ‘식의 값’, ‘좌변’, ‘우변’, ‘양변’, ‘이차식’, ‘전개식’, ‘연립일차방정식’, ‘소거’, ‘가감법’, ‘대입법’, ‘함수의 그래프’ 용어는 교수·학습 상황에서 사용할 수 있다.

(3) 도형과 측정

(가) 성취기준 해설

① [9수03-01] 점, 선, 면, 각과 관련된 용어는 다양한 상황에서 직관적으로 이해하게 한다.
② [9수03-03] 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 작도하는 활동을 하고, 자신의 방법을 설명하게 한다.
③ [9수03-05] 삼각형의 내각과 외각의 크기, 다각형의 내각과 외각의 크기의 합, 다각형의 대각선의 개수를 구하는 과정을 탐구하여 다각형의 성질을 추측하고 일반화할 수 있게 한다.
④ [9수03-07] 구체적인 사물, 전개도, 교구, 컴퓨터 프로그램 등을 이용하여 다면체와 회전체를 관찰하고 그 성질을 탐구하게 한다. 회전체 단면의 모양은 회전체의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 다룬다.
⑤ [9수03-09] 종이접기, 작도, 공학 도구 등을 이용하여 이등변삼각형의 성질을 추측하게 하고, 그 성질을 삼각형의 합동 조건을 이용하여 정당화할 수 있게 한다. <u>이때, 증명이라는 용어를 도입</u>하고, 그 필요성을 인식하게 한다.
⑥ [9수03-11] 사각형의 성질은 대각선에 관한 성질을 위주로 다룬다. 여러 가지 사각형의 성질을 통해 사각형 사이의 관계를 설명하게 한다.
⑦ [9수03-15] 피타고라스 정리는 다양한 활동을 통하여 추측하고 정당화할 수 있게 한다. 피타고라스 정리의 역은 직관적으로 이해하게 하고, 이를 이용하여 세 변의 길이가 주어진 삼각형이 직각삼각형인지 판별하게 한다.
⑧ [9수03-17] 삼각비를 활용하여 직접 측정하기 어려운 거리나 높이 등을 구해 보는 활동을 통해 유용성을 인식하고 흥미를 느낄 수 있게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 다양한 교구나 공학 도구를 이용하여 합동과 닮음의 의미를 이해하게 한다.
② 다각형과 다면체는 그 모양이 볼록인 경우만 다룬다.
③ 간단한 입체도형의 단면을 관찰하는 활동과 전개도를 접어 간단한 입체도형을 만드는 활동을 통해 평면도형과 입체도형의 관계를 직관적으로 이해하게 한다.
④ 다양한 교구나 공학 도구를 이용하여 도형을 그리거나 만들어 보는 활동을 통해 도형의 성질을 추론하고 토론할 수 있게 한다.
⑤ 도형의 성질을 이해하고 정당화하는 방법은 관찰이나 실험을 통한 확인, 사례나 근거 제시를 통한 설명, 유사성에 근거한 추론, 증명 등이 있으며, 이를 학생 수준에 맞게 활용할 수 있다.
⑥ 도형의 성질을 정당화하는 다양한 방법을 통해 체계적으로 사고하고 타인을 논리적으로 설득하는 태도를 갖게 한다.
⑦ 증명을 할 때, ‘가정’, ‘결론’ 용어는 다루지 않는다.
⑧ <u>수학사를 통하여</u> 피타고라스 정리, 삼각비에 관심을 가지고 그 유용성을 인식하게 한다.
⑨ 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다.
⑩ 삼각비의 값은 0°에서 90°까지의 각도에 대한 것만 다룬다.

⑪ 주변의 건축물, 문화유산, 예술 작품 등에서 도형의 성질을 찾게 하여 수학에 대한 흥미와 관심을 가질 수 있게 한다.
⑫ 복잡하게 변형된 평면도형의 넓이와 둘레의 길이, 입체도형의 겉넓이와 부피를 구하는 문제는 다루지 않는다.
⑬ 도형의 성질을 이해하고 정당화하는 것을 평가할 때는 증명 과정에서 지나치게 엄밀한 형식 논리 규칙의 이용을 요구하는 문제는 다루지 않는다.
⑭ 원과 비례에 관한 성질은 다루지 않는다.
⑮ '(도형의) 대응', '삼각형의 중점연결정리', '접선의 길이' 용어는 교수・학습 상황에서 사용할 수 있다.

(4) 자료와 가능성

(가) 성취기준 해설

① [9수04-01] 대푯값에는 초등학교에서 학습한 평균 이외에도 중앙값, 최빈값이 있음을 알고 그 필요성을 인식하게 한다. 자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구해 보고, 각 대푯값이 어떤 상황에서 유용하게 사용될 수 있는지 토론하게 한다.
② [9수04-03] 상대도수는 도수의 총합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 상황에서 간단히 다루고, 상대도수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
③ [9수04-04] 다양한 맥락에서 해결하고자 하는 통계적 탐구 문제를 설정하고 적절한 계획을 세워 자료를 수집하게 한다. 수집한 자료를 자료의 특성과 목적에 맞게 표, 그래프, 수치 등으로 나타내어 분석하고, 그 결과를 탐구 문제와 연결하여 해석하게 한다. 자료를 수집하고 분석할 때는 인터넷 검색, 웹 기반 소프트웨어, 통계 프로그램 등을 활용하게 한다. 수집한 자료나 분석 결과가 적절한지 판단하여 계획을 수정하고, 통계적 근거를 바탕으로 토론하는 등 통계적 문제해결 과정에 주도적으로 참여하게 한다.
④ [9수04-05] 경우의 수는 두 경우의 수를 합하거나 곱하는 경우 정도로만 다루고, 순열과 조합을 이용하면 쉽게 해결되는 등의 복잡한 경우의 수를 구하는 문제는 다루지 않는다.
⑤ [9수04-06] 확률은 실험이나 관찰을 통해 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다. 경우의 수의 비율로 확률을 다룰 때, 각 경우가 발생할 가능성이 동등하다는 것을 가정한다는 점에 유의하게 한다.
⑥ [9수04-08] <u>상자그림을 다룰 때는 두 집단의 분포를 비교하고 해석하는 활동에 중점을 두고, 이를 통해 상자그림의 유용성을 인식하게 한다.</u>
⑦ [9수04-09] 상관관계는 양의 상관관계, 음의 상관관계, 상관관계가 없는 경우로 구분하여 다룬다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 눈금 등을 부적절하게 사용하여 자료를 부정확하게 나타낸 표나 그래프에서 오류를 찾는 활동을 통해 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.
② 자료를 수집하고 정리하여 표나 그래프로 나타내거나 대푯값과 산포도를 구할 때 공학 도구를 이용할 수 있게 하고, 공학 도구의 편리함과 유용성을 인식하게 한다.
③ '자료와 가능성' 영역에서 환경, 지속가능한 발전 등 범교과 학습 주제를 소재로 다루고, 이를 탐구하는 과정에서 체계적으로 사고하고 합리적으로 의사 결정을 할 수 있게 한다.
④ 진로연계교육을 실시할 때는 학생의 흥미, 관심, 진로에 맞는 탐구 문제를 설정하여 통계 프로젝트를 수행하게 할 수 있다.
⑤ '계급값', '경우의 수' 용어는 교수・학습 상황에서 사용할 수 있다.

Ⅱ. 고등학교 <공통수학1> (핵심적인 내용)

(가) 성취기준 해설

(2) 방정식과 부등식

① [10공수1-02-02] 이차방정식은 계수가 실수인 경우만 다루고, 이차방정식은 복소수 범위에서 항상 근을 갖는다는 것을 이해하게 한다.
② [10공수1-02-06] 이차함수의 최대, 최소는 제한된 범위에서만 다룬다.
③ [10공수1-02-08] 미지수가 2개인 연립이차방정식은 일차식과 이차식이 각각 한 개씩 주어진 경우, 두 이차식 중 한 이차식이 간단히 인수분해 되는 경우만 다룬다.

(4) 행렬

① [10공수1-04-02] 행렬의 연산에서는 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 및 곱셈을 다루고, 행과 열의 수가 각각 2를 넘지 않는 범위에서 행렬의 곱셈을 할 수 있게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

(1) 다항식

① 다항식의 곱셈과 인수분해는 중학교에서 학습한 내용을 토대로 고등학교에서 추가된 내용을 이해하게 하고, 복잡한 인수분해 문제는 다루지 않는다.

(2) 방정식과 부등식

① 복소수의 성질과 사칙연산은 중학교에서 학습한 실수의 성질과 사칙연산과 연계하여 이해하게 하고, 나눗셈은 켤레복소수를 이용하여 계산하게 한다.

(4) 행렬

① 실생활 자료를 직사각형 모양으로 나타낼 수 있는 경우를 찾아보는 활동을 통해 행렬의 유용성을 인식하게 한다.

Ⅲ. 고등학교 <공통수학2> (핵심적인 내용)

(가) 성취기준 해설

(2) 집합과 명제

① [10공수2-02-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이용한 명제의 증명은 간단한 것만 다룬다.

(3) 함수와 그래프

① [10공수2-03-01] 함수의 개념은 중학교에서 학습한 내용을 확장하여 주어진 두 집합 사이의 대응 관계로 이해하게 한다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

(1) 도형의 방정식

① 도형의 방정식 학습을 통해 대수와 기하를 연결하는 사고의 전환으로 수학에 대한 흥미와 관심을 갖도록 다양한 교수·학습 경험을 제공한다.

Ⅳ. 고등학교 2~3학년 수학 (핵심적인 내용)

(1) 일반 선택 과목 <대수>

(가) 성취기준 해설

① [12대수01-02] 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다. 지수가 실수인 경우는 직관적으로 다룬다.

② [12대수01-07] 지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 그래프를 통해 확인하게 한다.

③ [12대수02-02] 삼각함수의 개념은 중학교에서 학습한 삼각비와 연계하여 이해하게 하며, 삼각함수의 성질은 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

④ [12대수02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계를 이해하고 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있게 한다.

⑤ [12대수03-05] 여러 가지 수열의 합에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 수열의 합이 간단한 것만 다룬다.

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 수열과 관련된 여러 가지 문제를 귀납적으로 표현할 수 있게 하고, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.

(2) 일반 선택 과목 <미적분Ⅰ>

(가) 성취기준 해설

① [12미적Ⅰ-03-03] 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속함수 $f(x)$의 함숫값이 음이 아닌 경우 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이를 일반적인 연속함수에 대한 정적분의 정의로 확장한다.

(3) 일반 선택 과목 <확률과 통계>

(나) 성취기준 적용 시 고려 사항

① 조건부확률은 조건이 주어진 상황에서의 가능성을 수치화한 확률로 이해하게 하고, 사건의 시간적 순서나 인과관계로 해석하지 않도록 한다.

◎ 교과서 관련 핵심 용어 (2022 개정)

Ⅰ. 중학교 1학년

(1) 소수

1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수

(2) 서로소

최대공약수가 1인 두 자연수

(3) x에 대한 방정식과 항등식

1. 방정식: x의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식
2. 항등식: x에 어떤 수를 대입하여도 항상 참이 되는 등식

(4) 정다면체

모든 면이 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 모두 같은 다면체

(5) 대푯값

자료의 전체적인 특징을 대표적인 하나의 수로 나타낸 값

(6) 중앙값

변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때 한가운데 있는 값

(7) 최빈값

자료에서 가장 많이 나타나는 값

(8) 상대도수

도수의 총합에 대한 각 계급의 도수의 비율

Ⅱ. 중학교 2학년

(1) 삼각형의 외심, 내심, 무게중심

1. 외심: 삼각형의 세 수직이등분선의 교점
2. 내심: 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점
3. 무게중심: 삼각형의 세 중선의 교점

(2) 사각형의 성질(대각선에 관한 성질)

1. 직사각형의 성질: 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
2. 마름모의 성질: 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

(3) 닮음 관계

한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 도형이 다른 한 도형과 합동일 때

Ⅲ. 중학교 3학년

(1) 산포도

변량이 흩어져 있는 정도를 하나의 수로 나타낸 값

Ⅳ. 고등학교 1학년

(1) $p \Rightarrow q$

p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건

(2) 일대일함수

$f: X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$일 때

(3) 일대일대응

일대일함수인 $f: X \to Y$의 치역과 공역이 서로 같을 때

(4) n개에서 r개를 택하는 순열

서로 다른 n개에서 $r(r \leq n)$개를 택하여 일렬로 배열하는 것

(5) n개에서 r개를 택하는 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r(r \leq n)$개를 택하는 것